ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 1999, том 62, № 5, с. 824–831

МАТЕРИАЛЫ, ПОСВЯЩЕННЫЕ 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.М. ФРАНКА

К ВОПРОСУ О ПОТЕНЦИАЛЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ С ВЕЩЕСТВОМ

© 1999 г. А. Л. Барабанов, С. Т. Беляев

Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва

Поступила в редакцию 09.10.98 г.

Представлен вывод уравнений, описывающих взаимодействие медленных нейтронов с неподвижными ядрами с учетом эффектов многократного рассеяния. Показано, что вид потенциала взаимодействия нейтронов с веществом существенно зависит от соотношения между длиной волны нейтронов и характерным расстоянием между ядрами. В случае ультрахолодных нейтронов потенциал определяется длиной рассеяния, а не амплитудой рассеяния нейтрона на изолированном ядре.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для исследования фундаментальных свойств нейтронов все чаще используется их глубокое охлаждение до скоростей ~1 м/с, при которых они могут накапливаться в сосудах. Удержание происходит вследствие слабого отталкивания нейтронов от стенок сосуда, возникающего при условии, что длина рассеяния α нейтронов на ядрах атомов вещества положительна [1]. Взаимодействие ультрахолодных нейтронов (УХН) с веществом сопровождается их потерями, обусловленными целым рядом причин – от просачивания в щели до таких принципиально неустранимых явлений, как захват нейтронов ядрами и нагрев нейтронов. С самого начала практических исследований с УХН [2] большое внимание уделялось проблеме снижения потерь (см., например, обзор [3]). Полученные недавно данные [4] по вероятностям селективного захвата УХН ядрами атомов веществ указывают, по-видимому, на важную роль микроструктуры поверхности стенок. Тем не менее в настоящее время имеются указания [5] на существование аномальных утечек УХН, которые невозможно описать в рамках существующих подходов к проблеме взаимодействия медленных нейтронов с веществом.

Для описания взаимодействия УХН с веществом обычно используется потенциал, мнимая часть которого ответственна за потери. Факт существования аномальных утечек означает, очевидно, что способы оценки такой мнимой части требуют совершенствования. В связи с этим представляется оправданным интерес к самой процедуре введения потенциала. Отметим, что вопрос о потенциале взаимодействия медленных нейтронов с веществом, впервые появившемся, по-видимому, в работе [6], неоднократно обсуждался в литературе [7–11]. Во всех этих работах потенциал в случае неподвижных ядер имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} bn(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где m – масса нейтрона, а $n(\mathbf{r})$ – плотность ядер (число ядер в единице объема). Проблема, однако, заключается в том, что следует подразумевать под величиной b. В работе [6] потенциал взаимодействия нейтрона с неупорядоченными ядрами был выражен через амплитуду рассеяния b медленного нейтрона на изолированном ядре. Однако в работах [7, 8] было показано, что сходным образом потенциал $U(\mathbf{r})$ может быть введен для случая взаимодействия нейтрона с упорядоченной системой ядер. При этом в качестве b следует выбрать длину рассеяния нейтрона на изолированном ядре. Результаты экспериментов с УХН вызвали новый всплеск интереса к потенциалу $U(\mathbf{r})$. Легко показать, что для правильного описания полного отражения УХН от среды (все равно – упорядоченной или неупорядоченной) в потенциале (1) под b следует подразумевать длину рассеяния, а не амплитуду рассеяния, в видимом противоречии с результатом [6]. Обоснование такой замены рассматривалось в [9–11]. В настоящей работе мы предлагаем свой вариант такого обоснования.

Потенциал взаимодействия нейтронов с веществом мы выводим, как обычно, из уравнений многократного рассеяния волн (МРВ). Наряду с этим выводом представлен способ получения уравнений МРВ, основанный лишь на короткодействии и большой глубине нейтрон-ядерного потенциала. Особое внимание уделяется часто встречающемуся в литературе псевдопотенциалу Ферми (см., например, [11]). Показано, что опирающиеся на него выводы непоследовательны и носят по существу лишь демонстрационный характер. Отдельно следует заметить, что в методе псевдопотенциала Ферми остается неясным, насколько полно учитываются (и учитываются ли вообще) эффекты многократного рассеяния ней-

тронов ядрами среды. В связи с этим в работе [12] были высказаны сомнения в применимости потенциального подхода к описанию взаимодействия сверхмедленных нейтронов с веществом. В предложенном нами выводе уравнений МРВ эффекты перерассеяний нейтронов в среде полностью учтены. В настоящей работе не рассматриваются эффекты, связанные с тепловым движением атомов среды, т.е. рассеивающие ядра считаются бесконечно тяжелыми и покоящимися. Для простоты мы не анализируем изотопические и спиновые эффекты, рассматривая ядра одинаковыми и бесспиновыми.

2. МЕТОД ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА ФЕРМИ

Псевдопотенциал Ферми имеет вид

$$U_j(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j) = \frac{2\pi\hbar^2(-f_j)}{\mu_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j). \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}_j$ – радиусы-векторы нейтрона и j-го ядра соответственно, m и M_j – их массы, $\mu_j = mM_j/(m+M_j)$ – приведенная масса системы, f_j – амплитуда рассеяния s-волнового нейтрона на изолированном j-м ядре. Расчет амплитуды рассеяния нейтрона на j-м ядре в с. ц. м. в первом борновском приближении с использованием этого потенциала дает как раз величину f_j. Отметим, что второе борновское приближение расходится, что указывает на нереалистический характер псевдопотенциала Ферми.

Взаимодействие нейтрона с системой неподвижных ядер описывается уравнением Шредингера

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r})\right)\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$
$$U(\mathbf{r}) = \sum_j U_j(\mathbf{r}-\mathbf{R}_j), \qquad (3)$$

где $E = \hbar^2k^2/2m$ и $\mathbf{k}$ – энергия и волновой вектор налетающего нейтрона. Переписывая это уравнение в интегральной форме

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}U(\mathbf{r}')\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \qquad (4)$$

и подставляя в него $U(\mathbf{r})$ в виде суммы псевдопотенциалов (2), получаем

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \sum_j b_j\Psi_j\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}, \qquad (5)$$

где $\Psi_j \equiv \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}_j)$. Входящую сюда величину $b_j = m(-f_j)/\mu_j$ называют амплитудой рассеяния нейтрона на j-м связанном ядре. В соответствии с формулой (5) волновая функция нейтрона в произвольной точке $\mathbf{r}$ определяется суперпозицией падающей плоской волны и всех рассеянных сферических волн. При этом результат рассеяния определяется конечным набором амплитуд Ψ_j. Естественно попытаться получить для них замкнутую систему уравнений.

Такую систему нельзя получить непосредственно из формулы (5). Действительно, аргумент функции, стоящей в левой части, не может быть выбран равным некоторому $\mathbf{R}_i$, так как в этом случае появляется расходимость в слагаемом $j = i$ в правой части. Лишь предположив, что амплитуда нейтронной волны на i-м ядре определяется суперпозицией падающей волны и волн, рассеянных всеми ядрами, кроме i-го, можно записать

$$\Psi_i = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} - \sum_{j\neq i} b_j\Psi_j\frac{e^{ik|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}. \qquad (6)$$

Следовательно, в методе псевдопотенциала Ферми эта система уравнений не столько выводится, сколько угадывается.

3. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ И ДЛИНА РАССЕЯНИЯ

В этом разделе в справочных целях приведены определения амплитуды рассеяния f и длины рассеяния α. Различие между ними существенно для дальнейшего. Амплитуда рассеяния определяет вид асимптотической волновой функции относительного движения при рассеянии медленного нейтрона на ядре

$$\Psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + f\frac{e^{iqx}}{x}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{q}$ – волновой вектор относительного движения, а $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ – относительный радиус-вектор. Амплитуда рассеяния связана с s-волновой фазой δ_0 формулой

$$f = \frac{i}{2q}(1 - e^{2i\delta_0}). \qquad (8)$$

Что же касается длины рассеяния, то она обычно определяется как предел отношения

$$\alpha = -\lim_{q\to 0}\frac{\delta_0}{q}. \qquad (9)$$

Поэтому при малых значениях q, точнее $q \ll 1/a$, где a – радиус потенциала, $\delta_0 = -q\alpha$. Для амплитуды рассеяния, следовательно, в том же линейном по q приближении получаем

$$f = \frac{i}{2q}(1 - e^{-2iq\alpha}) \simeq -\alpha + iq\alpha^2. \qquad (10)$$

Фаза δ_0 может быть выражена через логарифмическую производную L_0 s-волновой внутрен-

ней радиальной функции $\chi_0(x)$ (см. ниже формулу (20)) на границе ядра (см., например, [13]):

$$e^{2i\delta_0} = e^{-2iqa}\frac{L_0 + iqa}{L_0 - iqa}, \quad L_0 = \left.\frac{a\chi_0'(x)}{\chi_0(x)}\right|_{x=a}. \qquad (11)$$

При $qa \ll 1$ отсюда находим соотношения для фазы и длины рассеяния:

$$\delta_0 = -q\alpha, \quad \alpha = a\left(1 - \frac{1}{L_0}\right). \qquad (12)$$

Длиной рассеяния определяется изотропное сечение упругого рассеяния в с. ц. м. в пределе $q \longrightarrow 0$:

$$\sigma_{el} = 4\pi|f|^2 = \frac{4\pi}{q^2}e^{-2\mathrm{Im}\,\delta_0}|\sin\delta_0|^2 \underset{q\to 0}{=} 4\pi|\alpha|^2. \qquad (13)$$

В отсутствие поглощения нейтронов ядрами потенциал $U(x)$, логарифмическая производная L_0, длина рассеяния α и фаза рассеяния δ_0 являются действительными величинами. В то же время амплитуда рассеяния f в соответствии с (10) имеет мнимую часть. Поглощение нейтронов ядрами, ведущее к испусканию γ-квантов, может быть учтено введением мнимой добавки к потенциалу: $U \longrightarrow U - iW$ ($W > 0$). Это приводит к появлению мнимой части у логарифмической производной: $L_0 \longrightarrow L_0 - i\phi_0$. Считая эту мнимую часть малой, для длины рассеяния получаем

$$\alpha = a\left(1 - \frac{1}{L_0 - i\phi_0}\right) \simeq$$
$$\simeq a\left(1 - \frac{1}{L_0} - \frac{i\phi_0}{L_0^2}\right) = \alpha' - i\alpha'', \qquad (14)$$

где α' и $-\alpha''$ – действительная и мнимая части длины рассеяния. Тогда амплитуда рассеяния принимает вид

$$f \simeq -\alpha + iq\alpha^2 \simeq -\alpha' + i(q\alpha'^2 + \alpha''). \qquad (15)$$

Мнимая часть амплитуды рассеяния связана с полным сечением взаимодействия оптической теоремой

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{q}\mathrm{Im}\,f = 4\pi\alpha'^2 + \frac{4\pi\alpha''}{q}. \qquad (16)$$

Видно, что σ_{tot} превышает сечение упругого рассеяния $\sigma_{el} = 4\pi\alpha'^2$ на величину сечения захвата нейтронов ядрами

$$\sigma_c = \frac{4\pi\alpha''}{q} = \frac{4\pi\alpha\phi_0}{qL_0^2}. \qquad (17)$$

Этот же результат для σ_c получается из общей формулы для сечения реакции:

$$\sigma_c = \frac{\pi}{q^2}(1 - |e^{2i\delta_0}|^2) = \frac{4\pi a\phi_0}{q(L_0^2 + (\phi_0 + qa)^2)} \qquad (18)$$

при условии $qa \ll 1$ и $\phi_0^2 \ll L_0^2$.

4. РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ НА НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРАХ

В соответствии с интегральным уравнением рассеяния (4) волновая функция нейтрона в точке $\mathbf{r}$ области, свободной от потенциалов, может быть записана в форме (потенциалы U_j, конечно, считаем неперекрывающимися)

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \sum_j I_j(\mathbf{r}),$$
$$I_j(\mathbf{r}) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}U_j(|\mathbf{r}'-\mathbf{R}_j|)\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'). \qquad (19)$$

Каждый из интегралов $I_j(\mathbf{r})$ вычисляется по объему шара с радиусом a_j с центром в точке $\mathbf{R}_j$. Решение уравнения Шредингера (3) внутри шара, отвечающее s-волне, обычным образом представляем в виде

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\chi_0^j(|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}. \qquad (20)$$

Переходя к переменной $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_j$, для функции $\chi_0^j(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\chi_0^j(x)}{dx^2} - \frac{2mU_j(x)}{\hbar^2}\chi_0^j(x) + k^2\chi_0^j(x) = 0 \qquad (21)$$

с граничным условием $\chi_0^j(0) = 0$. Поскольку для медленных нейтронов справедливо $2m|U_j|/\hbar^2 \gg k^2$, то, пренебрегая здесь и далее членами порядка $\sim k^2$, запишем

$$U_j(x)\chi_0^j(x) \simeq \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\chi_0^j(x)}{dx^2}. \qquad (22)$$

С другой стороны, ввиду короткодействия потенциала U_j интеграл $I_j(\mathbf{r})$ принимает вид

$$I_j(\mathbf{r}) = \frac{2me^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}}{\hbar^2|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}\int_0^{a_j} U_j(x)\chi_0^j(x)xdx. \qquad (23)$$

Подстановка в эту формулу соотношения (22) и последующее интегрирование с учетом ранее полученной связи (12) между логарифмической производной L_0^j, радиусом a_j и длиной рассеяния α_j дает следующие выражения:

$$I_j(\mathbf{r}) = F_j\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}, \quad F_j = \frac{\alpha_j\chi_0^j(a_j)}{a_j - \alpha_j}. \qquad (24)$$

Таким образом, в соответствии с формулами (19) и (24) волновая функция медленного нейтрона в произвольной точке $\mathbf{r}$, лежащей вне области действия потенциалов, может быть представлена в виде суперпозиции падающей плоской волны и суммы рассеянных сферических волн:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \sum_j F_j \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}. \quad (25)$$

При этом вклад j-го ядра в рассеянную волну определяется величиной F_j, пропорциональной амплитуде s-волновой составляющей нейтронной волновой функции на поверхности j-го ядра. Этот результат аналогичен выражению (5), но получен без привлечения существенных предположений о форме потенциала взаимодействия нейтронов и ядер. Кроме того, в приведенном выводе нигде не оговаривалась кратность взаимодействия нейтронов с ядрами. Поэтому эффекты многократных перерассеяний здесь полностью учтены.

5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЙТРОННЫХ АМПЛИТУД

Выведем уравнения, связывающие между собой нейтронные амплитуды F_j. Составляющая волновой функции нейтрона в окрестности i-го ядра, отвечающая s-волне, может быть представлена, как обычно, в виде

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{u_0^i(x_i)}{x_i}, \quad (26)$$

где $\mathbf{x}_i = \mathbf{r} - \mathbf{R}_i$. Радиальную функцию мы обозначили u_0^i, а не χ_0^i, как в (20), чтобы подчеркнуть, что записываем решение уравнения Шредингера вне ядра. Тогда в окрестности i-го ядра формула (25) в линейном по k приближении принимает вид

$$\frac{u_0^i(x_i)}{x_i} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} - F_i\frac{1+ikx_i}{x_i} - \sum_{j\neq i} F_j \frac{e^{ik|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}. \quad (27)$$

Устремляя $x_i \longrightarrow a_i$ и используя непрерывность волновой функции на границе ядра ($u_0^i(a_i) = \chi_0^i(a_i)$), получаем искомую систему уравнений для амплитуд F_j:

$$F_i\left(\frac{1}{\alpha_i} + ik\right) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} - \sum_{j\neq i} F_j \frac{e^{ik|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}. \quad (28)$$

Заметим, что этим уравнениям можно придать форму (6), если переопределить нейтронные амплитуды следующим образом:

$$\Psi_i = F_i\left(\frac{1}{\alpha_i} + ik\right). \quad (29)$$

Тогда

$$F_j = \frac{\Psi_j\alpha_j}{1+ik\alpha_j} \simeq \Psi_j\alpha_j(1-ik\alpha_j) \simeq -f_j\Psi_j, \quad (30)$$

где мы воспользовались соотношением (10), связывающим в общем случае длину рассеяния α_j и амплитуду рассеяния f_j. В рассматриваемом приближении бесконечно тяжелых ядер величины $-f_j$ следует считать тождественно равными амплитудам $b_j = m(-f_j)/\mu_j$. Ясно также, что с учетом переопределения (30) формула (25) для волновой функции нейтрона принимает вид (5).

Несколько примеров точных решений уравнений многократного рассеяния (5), (6) для случаев упорядоченного расположения ядер приведены в [11, 14]. Среди них – задача об отражении медленных нейтронов от плоской бесконечной решетки (случай объемной бесконечной кубической решетки рассмотрен в [14]). Воспроизведем здесь ответ ввиду его поучительности. Пусть одинаковые рассеивающие ядра располагаются в узлах решетки, состоящей из квадратных ячеек со стороной l в плоскости (x, y). Примем для простоты, что волновой вектор $\mathbf{k}$ налетающих нейтронов перпендикулярен плоскости. В силу симметрии задачи амплитуды Ψ_j нейтронной волны на всех ядрах решетки одинаковы, т.е. $\Psi_j = C$. Применяя уравнение (6) к ядру, расположенному в начале координат, для постоянной C находим:

$$C = 1 + \frac{fC}{l}\sum_{(n_x,n_y)\neq(0,0)} \frac{e^{ikl\sqrt{n_x^2+n_y^2}}}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}, \quad (31)$$

где n_x и n_y пробегают целые значения. Здесь всюду мы полагаем $b = -f$. В то же время волновая функция $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ (5) приводится к виду

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{2\pi ifC}{l^2}\sum_{n_x,n_y} \frac{e^{ik'_x x + ik'_y y + ik'_z|z|}}{k'_z}, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{k}' = \frac{2\pi n_x}{l}\mathbf{e}_x + \frac{2\pi n_y}{l}\mathbf{e}_y + \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n_x}{l}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n_y}{l}\right)^2}\,\mathbf{e}_z. \quad (33)$$

Видно, что при достаточно большом k образуются дифрагированные волны. Однако если n_x и n_y таковы, что $k^2 - (2\pi n_x/l)^2 - (2\pi n_y/l)^2 < 0$, то соответствующая дифрагированная волна оказывается локализованной вблизи решетки. При малом k ($k < 2\pi/l$) такова ситуация для всех волн с $(n_x, n_y) \neq (0, 0)$. В этом случае на больших расстояниях от

плоскости решетки получаем

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} e^{ikz} + \dfrac{2\pi i f C}{kl^2} e^{-ikz}, & z < 0, \\ \left(1 + \dfrac{2\pi i f C}{kl^2}\right) e^{ikz}, & z > 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Естественно ожидать, что в отсутствие поглощения нейтронов ядрами постоянная C такова, что сумма вероятностей отражения и прохождения равна единице, т.е.

$$\left|\frac{2\pi i f C}{kl^2}\right|^2 + \left|1 + \frac{2\pi i f C}{kl^2}\right|^2 = 1. \qquad (35)$$

Последовательность тождественных преобразований с учетом явного вида уравнения (31), определяющего постоянную C, приводит это условие к виду

$$\operatorname{Im} f = k|f|^2. \qquad (36)$$

По существу это просто требование равенства полного сечения взаимодействия (16) и полного сечения рассеяния (13) в отсутствие поглощения. Амплитуда f этому условию, конечно, удовлетворяет.

6. ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЙТРОНОВ С ВЕЩЕСТВОМ

Уравнения МРВ в форме (25), (28) или (5), (6) описывают взаимодействие медленных нейтронов с ядрами среды. При упорядоченном расположении ядер эти уравнения могут быть решены точно. В этом случае, вообще говоря, нет необходимости в переходе к потенциальному описанию взаимодействия нейтронов со средой. Нетрудно, однако, проверить, что в той же, рассмотренной выше, задаче о нормальном падении нейтронов на плоскую решетку правильные результаты для коэффициентов отражения и прохождения получаются с потенциалом типа (1), а именно:

$$U(z) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \alpha n \delta(z), \qquad (37)$$

где $n = 1/l^2$ – поверхностная плотность ядер, а α – длина рассеяния нейтрона на изолированном ядре.

Перейдем теперь к случаю неупорядоченного расположения ядер. Очевидно, точное решение уравнений МРВ при этом невозможно. Имеется, однако, глубокое отличие между случаями взаимодействия тепловых и ультрахолодных нейтронов с неупорядоченными конденсированными средами. В первом случае длина волны нейтрона сравнима с расстояниями между соседними ядрами. Поэтому амплитуды Ψ_j или F_j нейтронной волны сильно меняются от ядра к ядру. В то же время длина волны ультрахолодного нейтрона ~100 Å очень велика по сравнению с межъядерными расстояниями. Соответственно амплитуды Ψ_j или F_j можно считать медленными функциями координаты $\mathbf{R}_j$.

В ранних работах [6, 7] рассматривался только случай тепловых нейтронов. Основной результат этих работ состоял во введении усредненной по положениям рассеивающих ядер функции $\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle$ или, иначе, когерентной составляющей волновой функции нейтрона. При этом разность $\delta\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle$ интерпретировалась как некогерентная или флуктуирующая составляющая волновой функции. В частности, было показано, что именно когерентная составляющая $\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle$ удовлетворяет уравнению Шредингера (3) с потенциалом (1), где $b = -f$. Подчеркнем, что в случае взаимодействия тепловых нейтронов с неупорядоченной средой необходимость введения усреднения по положениям ядер диктуется, в первую очередь, сильными и хаотическими отличиями друг от друга слагаемых в суммах, входящих в уравнения МРВ (5), (6) или (25), (28). Заметим также, что в случае тепловых нейтронов естественна чувствительность потенциала взаимодействия к упорядоченности рассеивающих ядер. Потенциал (1) для неупорядоченных ядер, выражающийся через амплитуду рассеяния $b = -f$, содержит в соответствии с (10), (15) мнимую часть даже в отсутствие поглощения нейтронов. Это приводит к затуханию когерентной составляющей волновой функции $\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle$ при прохождении тепловых нейтронов через вещество. Так и должно быть вследствие наличия некогерентного (диффузного) рассеяния нейтронов на ядрах, описывающегося функцией $\delta\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ (см. [6]). В то же время при рассеянии на упорядоченных ядрах волновая функция полностью определяется когерентной составляющей $\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle$, тогда как $\delta\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0$. Поэтому затухание должно быть исключено заменой амплитуды рассеяния $b = -f$ на длину рассеяния $b = \alpha$ так, как это сделано в потенциале (37) (см. [7, 8]).

Совершенно иначе обстоит дело при взаимодействии ультрахолодных нейтронов со средой. Здесь мы имеем дело с медленно меняющимися слагаемыми в суммах, входящих в уравнения МРВ (5), (6) или (25), (28). Поэтому нет необходимости в усреднении по положениям рассеивающих ядер и, следовательно, в разделении истинной волновой функции $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ на когерентную и некогерентную составляющие. Задача состоит только в замене плавно меняющихся величин, зависящих от дискретного индекса j, аналогичными функциями непрерывной координаты $\mathbf{R}$ и в корректном переходе от сумм к интегралам. При этом ясно, что упорядоченность среды никак не влияет на характер ее взаимодействия с нейтронами.

При таком подходе к проблеме в качестве исходных следует взять уравнения (28) для нейтронных амплитуд. Перепишем их в виде

$$\frac{F_i}{\alpha} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} - \sum_{j\neq i} F_j \frac{\cos k|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} - \\ - i\sum_j F_j \frac{\sin k|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}. \quad (38)$$

В последнем слагаемом правой части происходит суммирование по всем j, включая $j = i$. Переход к непрерывной среде для функции $F_i/\alpha \longrightarrow \psi(\mathbf{R})$ дает

$$\psi(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} - \alpha\int n(\mathbf{R}')\psi(\mathbf{R}')\frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}d^3R'. \quad (39)$$

Замена первой из сумм, стоящих в правой части (38), на интеграл по всему пространству производится с точностью до интеграла по области пространства, окружающей i-е ядро. Поскольку в этой области $\cos k|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \simeq 1$, то этот интеграл имеет масштаб $\sim F_i/l$, где l – характерное расстояние между ядрами. Ясно, что этой величиной можно пренебречь в сравнении со стоящим в левой части слагаемым F_i/α, так как $l \gg \alpha$. Уравнение (25) после перехода к непрерывной среде также приобретает вид (39), но с функцией $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ в левой части. Поэтому функцию $\psi(\mathbf{r})$ вне области сосредоточения ядер следует считать тождественно совпадающей с истинной волновой функцией $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ рассеянного нейтрона.

Формула (39) подобна интегральному уравнению рассеяния (4). Поэтому она без труда переписывается в форме дифференциального уравнения Шредингера

$$(\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (40)$$

В качестве потенциала получаем

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2m}u(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}) = 4\pi\alpha n(\mathbf{r}). \quad (41)$$

Этот потенциал действителен в отсутствие поглощения нейтронов ядрами.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен вывод потенциала взаимодействия УХН с веществом, учитывающий эффекты многократного рассеяния нейтронов. Вывод основан на короткодействии нейтрон-ядерных сил в сравнении с характерным расстоянием между ядрами и на малости энергии медленных нейтронов в сравнении с глубиной нейтрон-ядерного потенциала. Последнее обстоятельство позволяет последовательно пренебрегать слагаемыми $\sim k^2$ при получении замкнутой системы уравнений для нейтронных амплитуд. В то же время линейные по k члены всюду учитывались.

Мы считаем необходимым подчеркнуть следующее обстоятельство. Уравнения МРВ, полученные в предположении об s-волновом характере взаимодействия нейтронов с ядрами, одинаково справедливы для любых медленных нейтронов с $k \ll 1/a$, где a – радиус ядра. Однако процедуры перехода к потенциалу совершенно различны для тепловых нейтронов с длиной волны масштаба расстояния l между соседними ядрами и ультрахолодных нейтронов с длиной волны, существенно превосходящей l. В первом случае потенциал вида (1) с $b = -f$, где f – амплитуда рассеяния нейтрона на изолированном ядре, возникает для когерентной составляющей $\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle$ волновой функции нейтрона при условии, что он движется в неупорядоченной среде. Во втором же случае разделение волновой функции $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ на когерентную и некогерентную составляющие представляется неоправданным. Потенциал вида (1) с $b = \alpha$, где α – длина рассеяния нейтрона на изолированном ядре, появляется в уравнении Шредингера для функции $\psi(\mathbf{r})$, описывающей распространение ультрахолодных нейтронов в веществе и совпадающей с $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ вне вещества. Очевидный интерес представляет распространение этого подхода на случай учета теплового движения атомов среды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-15-96548.

Приложение

Для полноты изложения покажем, следуя работе [6], как появляется потенциал при описании распространения в веществе когерентной составляющей волновой функции. Выше уже было сказано, что в случае, когда длина волны нейтрона оказывается того же порядка, что и расстояния между соседними ядрами в неупорядоченной среде, амплитуды F_j (24) или Ψ_j (29) сильно и хаотично меняются при переходе от ядра к ядру. Поэтому для анализа процесса взаимодействия нейтронов с веществом невозможно воспользоваться непосредственно точными формулами (25) или (5) для волновой функции. Удобно ввести усреднение по положениям рассеивающих ядер. Считая среду совершенно неупорядоченной, предположим, что плотность вероятности обнаружить 1-е ядро в точке $\mathbf{R}_1$, 2-е ядро в точке $\mathbf{R}_2$ и т.д. определяется функцией

$$P(\mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_N) = \left(\frac{1}{N}\right)^N n(\mathbf{R}_1)\ldots n(\mathbf{R}_N), \quad (\text{П}.1)$$

где $n(\mathbf{R})$ – плотность ядер, а N – их полное число. Среднее значение $\langle\psi\rangle$ произвольной функции $\psi(\mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_N)$ определяется интегралом

$$\langle\psi\rangle = \int\ldots\int\psi(\mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_N) \times \\ \times P(\mathbf{R}_1 \ldots \mathbf{R}_N) d^3R_1 \ldots d^3R_N. \quad (\text{П.2})$$

В то же время под величиной $\langle\psi\rangle_i$ мы будем подразумевать аналогичное выражение с исключенным интегрированием по d^3R_i. Ясно, что $\langle\psi\rangle_i$ зависит от координаты $\mathbf{R}_i$.

Применяя усреднение к обеим частям уравнения (5), получаем

$$\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = \\ = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{N}\sum_j \int b_j \langle\Psi_j\rangle_j \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_j|} n(\mathbf{R}_j) d^3R_j. \quad (\text{П.3})$$

Входящая в правую часть амплитуда нейтронной волны на j-м ядре $\langle\Psi_j\rangle_j$, усредненная по положениям всех остальных ядер, определяется в свою очередь уравнением

$$\langle\Psi_i\rangle_i = \\ = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} - \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} \int b_j \langle\Psi_j\rangle_{ij} \frac{e^{ik|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|}}{|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|} n(\mathbf{R}_j) d^3R_j, \quad (\text{П.4})$$

которое следует из уравнения (6). Здесь $b_j = -f_j$ (см. текст за формулой (30)).

Ввиду макроскопичности числа N естественно предположить, что амплитуда нейтронной волны на j-м ядре $\langle\Psi_j\rangle_{ij}$, усредненная по положениям всех остальных ядер, кроме i-го, совпадает с усредненной амплитудой $\langle\Psi_j\rangle_j$. Эта амплитуда, напомним, зависит от координаты $\mathbf{R}_j$. В результате в правой части уравнения (П.4) возникает сумма $N-1$ одинаковых слагаемых. Опуская теперь уже лишний индекс j,

$$\langle\Psi_j\rangle_j \longrightarrow \langle\Psi\rangle_{\mathbf{R}}, \quad (\text{П.5})$$

и полагая $(N-1)/N \simeq 1$, для функции $\langle\Psi\rangle_{\mathbf{R}}$ получаем интегральное уравнение

$$\langle\Psi\rangle_{\mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} - b\int n(\mathbf{R}')\langle\Psi\rangle_{\mathbf{R}'} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} d^3R'. \quad (\text{П.6})$$

Аналогичным образом замена (П.5) позволяет переписать уравнение (П.3) для усредненной волновой функции нейтрона в виде

$$\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - b\int n(\mathbf{R}')\langle\Psi\rangle_{\mathbf{R}'} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}'|} d^3R'. \quad (\text{П.7})$$

Ввиду одинаковости уравнений (П.6) и (П.7) усредненную амплитуду $\langle\Psi\rangle_{\mathbf{R}}$ можно отождествить с усредненной волновой функцией нейтрона $\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})\rangle$ внутри вещества.

Легко видеть, что интегральное уравнение (П.7) для усредненной волновой функции можно преобразовать в дифференциальное уравнение Шредингера

$$(\Delta + k^2)\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle = u(\mathbf{r})\langle\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})\rangle \quad (\text{П.8})$$

с потенциалом

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2m}u(\mathbf{r}), \quad u(\mathbf{r}) = 4\pi(-f)n(\mathbf{r}). \quad (\text{П.9})$$

Мы здесь учли, что $b = -f$ – амплитуда рассеяния нейтрона на изолированном ядре.

Подчеркнем еще раз, что хотя по форме уравнения (39) и (П.7) подобны друг другу, интегрирования по объему вещества в них были получены из разных соображений. В случае ультрахолодных нейтронов сумма слабо меняющихся величин заменяется интегралом. В то же время в случае тепловых нейтронов интегрирование появляется при усреднении амплитуд. Именно поэтому потенциалы (41) и (П.9) немного отличаются друг от друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1952.
2. *Лущиков В.И. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 40.
3. *Игнатович В.К.* // УФН. 1996. Т. 166. С. 303.
4. *Арзуманов С.С. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. С. 3.
5. *Варламов В.Е. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 317.
6. *Foldy L.L.* // Phys. Rev. 1945. V. 67. P. 107.
7. *Lax M.* // Rev. Mod. Phys. 1951. V. 23. P. 287.
8. *Барышевский В.Г., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И.* Препринты ОИЯИ Р-2111, Р-2230. Дубна, 1965.
9. *Игнатович В.К.* Препринт ОИЯИ Р4-6553. Дубна, 1972.
10. *Франк И.М.* Препринты ОИЯИ Р3-7809, Р3-7810. Дубна, 1974.
11. *Игнатович В.К.* // Физика ультрахолодных нейтронов. М.: Наука, 1986.
12. *Франк А.И., Носов В.Г.* // ЯФ. 1995. Т. 58. С. 453.
13. *Бор О., Моттельсон Б.* Структура атомного ядра. М.: Мир, 1971. Т. 1.
14. *Ignatovich V.K., Utsuro M.* // Phys. Rev. 1997. V. B55. P. 14774.

ON THE POTENTIAL OF INTERACTION OF ULTRACOLD NEUTRONS WITH MATTER

A. L. Barabanov, S. T. Belyaev

Equations describing interaction of slow neutrons with fixed nuclei with regard to multiple scattering are derived. The form of potential is shown to be sensitive to the relationship among length of neutron wave and characteristic distance between nuclei. The potential for ultracold neutrons is determined by scattering length and not by scattering amplitude of neutron on an isolated nucleus.