ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 3, вып. 2, 1966

СТРУКТУРА КОЛЛЕКТИВНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ПРОСТОЙ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

С. Т. БЕЛЯЕВ, Б. А. РУМЯНЦЕВ

(Поступила в редакцию 29 июня 1965 г.)

В рамках модели со спариванием и квадрупольным взаимодействием нуклонов в осцилляторной потенциальной яме вычисляются массовые параметры коллективного гамильтониана деформированных ядер как функции β, γ и числа нуклонов в верхней незаполненной оболочке. Обсуждается соответствие полученного гамильтониана с гидродинамическим выражением, используемым в феноменологических методах.

1. Введение

Наиболее простым путем исследования коллективных возбуждений ядер является постулирование некоторого феноменологического гамильтониана, описывающего динамику ядра в терминах «коллективных переменных». Классическим примером является объяснение вращательных спектров деформированных ядер на основе гамильтониана О. Бора. В этом случае четкие закономерности в ядерных спектрах позволяют практически однозначно воссоздать коллективный вращательный гамильтониан. Для описания возбуждений другой природы необходимы более детальные предположения о структуре коллективного гамильтониана. Экспериментальные закономерности в ядерных спектрах не дают однозначных указаний о виде гамильтониана, а естественная необходимость введения дополнительных свободных параметров открывает при этом широкие возможности для различных спекуляций. В последние годы появилось большое число феноменологических моделей, часто основанных на совершенно различных и противоречащих друг другу предположениях [1, 2]. Хотя каждая из моделей в какой-то мере удовлетворительно описывает ограниченное число ядер (по крайней мере, одно ядро — идеально), отсутствие единой картины не может не вызвать разочарования. Понятны поэтому попытки обоснования вида коллективного гамильтониана из микроскопических представлений о движении нуклонов в самосогласованном поле и их взаимодействии. Так как основное различие между моделями связано с видом потенциальной энергии, то исследования были предприняты именно в этом направлении. Рядом авторов исследовалась равновесная форма ядер и вид потенциальной энергии в известной микроскопической модели, учитывающей спаривание и квадрупольное взаимодействие нуклонов [3]. Хотя полученные результаты позволяют сделать определенные заключения о правдоподобности некоторых феноменологических моделей (например, практически закрыть модель жесткого неаксиального ротатора [2]), они являются недостаточными для установления вида правильного коллективного гамильтониана.

Структура коллективных возбуждений ядра определяется не только формой потенциальной энергии, но и видом оператора кинетической энергии. Как правило, при решении последнего вопроса авторы всех феноменологических моделей проявляют единство, используя гидродинамическое выражение обобщенной модели Бора [4]. Насколько обоснованным является этот выбор? Ведь известно, в частности, что микроскопические

вычисления моментов инерции, дающие хорошее согласие с экспериментом для всех деформированных ядер [5], доказывают принципиально негидродинамическую природу моментов инерции.

Одним из авторов (С. Б.) был получен общий вид коллективного гамильтониана при произвольном межнуклонном взаимодействии [6]. Целью настоящей работы является исследование структуры оператора кинетической энергии коллективного гамильтониана для деформированных ядер в рамках модели с квадрупольным взаимодействием и спариванием нуклонов. Мы не ставим здесь целью количественное вычисление параметров кинетической энергии T для конкретных ядер. Основной задачей является анализ общих свойств оператора T в зависимости от числа нуклонов в верхней незаполненной оболочке и параметров взаимодействия. Поэтому в конкретных вычислениях мы ограничиваемся простой осцилляторной моделью одночастичных состояний, а отличия, связанные с реальной схемой уровней, обсуждаются лишь качественно.

2. Основные уравнения

Сформулируем кратко некоторые результаты работы [6], необходимые для дальнейшего. Кинетическую энергию для квадрупольных степеней свободы ядра можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\mu\mu'} B_{\mu\mu'}\dot{\alpha}_\mu\dot{\alpha}_{\mu'}, \tag{1}$$

где $\dot{\alpha}_\mu$ — скорости изменения тензора квадрупольной деформации α_μ. Квантовый оператор, соответствующий (1) и выраженный в угловых переменных (θ_i) и параметрах формы (β, γ) [4], имеет вид

$$T = -\frac{1}{2gR}\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{B_\gamma R}{g}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{B_\beta R}{g}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{R^4}\frac{\partial}{\partial R}\frac{B_{\beta\gamma}R}{g}\beta^3\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{\beta\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{B_{\beta\gamma}R}{g}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}\right\} + \sum_{i=1,2,3}\frac{I_i^2}{2\mathcal{F}_i}, \tag{2}$$

где g и R определяются из соотношений

$$g^2 = B_\beta B_\gamma - B^2_{\beta\gamma}, \qquad \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3 = 4\beta^6(\sin^2 3\gamma)R^2. \tag{3}$$

Здесь I_i — операторы проекций момента на оси симметрии ядра. Моменты инерции $\mathcal{F}_i$, а также массовые коэффициенты B_β, B_γ, $B_{\beta\gamma}$, вообще говоря, являются сложными функциями β и γ. При использовании оператора (2) волновые функции следует нормировать в пространстве β, γ с элементом объема

$$d\tau(\beta, \gamma) = |gR\beta^4\sin 3\gamma|\, d\beta d\gamma. \tag{4}$$

Из условия симметрии массовые коэффициенты в (2) могут быть выражены через функции только двух тензорных инвариантов β^2 и $\beta^3\cos 3\gamma$. В частности, для моментов инерции имеем

$$\mathcal{F}_i = 4\beta^2(B_0 - B_1\cos\gamma_i - B_2\cos 2\gamma_i)\sin^2\gamma_i, \tag{5}$$
$$\gamma_i = \gamma - {}^2/_3\pi i,$$

где B_n $(n = 0, 1, 2)$ — «скалярные» функции от β^2 и $\beta^3\cos 3\gamma$.

Параметры, входящие в (2), могут быть также выражены через компоненты тензора масс $B_{\mu\mu'}$ (см. (1)):

$$\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_{xx} = -4\beta^2(B_{1-1} + B_{11})\sin^2\gamma_1,$$
$$\mathcal{F}_2 \equiv \mathcal{F}_{yy} = -4\beta^2(B_{1-1} - B_{11})\sin^2\gamma_2, \tag{6}$$
$$\mathcal{F}_3 \equiv \mathcal{F}_{zz} = 4\beta^2(B_{2-2} - B_{22})\sin^2\gamma_3;$$

$$B_\beta = B_{00}\cos^2\gamma + \sqrt{2}B_{20}\sin 2\gamma + (B_{2-2}+B_{22})\sin^2\gamma,$$
$$B_\gamma = B_{00}\sin^2\gamma - \sqrt{2}B_{20}\sin 2\gamma + (B_{2-2}+B_{22})\cos^2\gamma, \qquad (7)$$
$$B_{\beta\gamma} = {}^1/_2(B_{2-2}+B_{22}-B_{00})\sin 2\gamma + \sqrt{2}B_{20}\cos 2\gamma.$$

В микроскопической модели с учетом спаривания и квадрупольного взаимодействия нуклонов элементы тензора $B_{\mu\mu'}$ выражаются через суммы по одночастичным состояниям $|\nu\rangle$. Если пренебречь несущественной зависимостью константы спаривания Δ от деформации, найдем ($\hbar = 1$)

$$B_{\mu\mu'} = 2\varkappa^2 \sum_{\nu\nu'} \frac{E_\nu E_{\nu'} - \varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'} + \Delta^2}{2E_\nu E_{\nu'}(E_\nu + E_{\nu'})^3}\left(\langle\nu|q_\mu^*|\nu'\rangle + \frac{\delta_{\nu'\nu}}{\varkappa}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_\mu}\right)\times$$
$$\times\left(\langle\nu'|q_{\mu'}^*|\nu\rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\varkappa}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_{\mu'}}\right), \qquad (8)$$

где ε_ν — энергия одночастичных уровней (отсчитанных от химического потенциала системы λ), $\varkappa$ — параметр квадрупольного взаимодействия, $E_\nu = (\varepsilon_\nu^2 + \Delta^2)^{1/2}$. Члены с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ учитывают изменения химического потенциала при деформации и автоматически исключают вклад нефизического состояния. Из условия постоянства числа частиц следует

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_\mu} = -\varkappa\sum_\nu \frac{\Delta}{E_\nu^3}\langle\nu|q_\mu^*|\nu\rangle \Big/ \sum_{\nu'}\frac{\Delta}{E_{\nu'}^3}. \qquad (9)$$

Для деформированных ядер выражение (8) можно упростить. В сумме (8) при одном фиксированном индексе (например, ν) другой (ν') пробегает ограниченное число значений, разрешаемых правилами отбора для матричных элементов. В квазиклассическом приближении $\langle\nu|q|\nu'\rangle$ можно считать функциями энергетических переменных $\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}$ и $\varepsilon_{\nu'}$, причем при фиксированной разности $(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'})$ величина $\langle\nu|q|\nu'\rangle$ является плавной функцией ε_ν, заметно меняясь лишь на ширине оболочки. Первый множитель в сумме (8) при $\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'} = \text{const}$ имеет резкий максимум шириной Δ у поверхности Ферми ($\varepsilon_\nu = 0$), причем

$$\int d\varepsilon_\nu \frac{E_\nu E_{\nu'} - \varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'} + \Delta^2}{E_\nu E_{\nu'}(E_\nu + E_{\nu'})^3} = \frac{1}{2\Delta^2} f\left(\frac{\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right), \qquad (10)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[1 - \frac{\operatorname{ar\,sh} x}{x(1+x^2)^{1/2}}\right]. \qquad (11)$$

Таким образом, при достаточно большом расщеплении оболочечных уровней ($\gg\Delta$) можно в (8) произвести замену

$$\frac{E_\nu E_{\nu'} - \varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'} + \Delta^2}{E_\nu E_{\nu'}(E_\nu + E_{\nu'})^3} \to \frac{1}{2\Delta^2} f\left(\frac{\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right)\delta(\varepsilon_\nu). \qquad (12)$$

В результате (8) принимает вид

$$B_{\mu\mu'} = \frac{\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_{\nu\nu'} f\left(\frac{\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right)\delta(\varepsilon_\nu)\left(\langle\nu|q_\mu^*|\nu'\rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\varkappa}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_\mu}\right)\times$$
$$\times\left(\langle\nu'|q_{\mu'}^*|\nu\rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\varkappa}\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_{\mu'}}\right). \qquad (13)$$

Матричные элементы квадрупольного момента отличны от нуля, во-первых, для переходов внутри одной оболочки, а во-вторых, через одну

оболочку ($\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'} \sim 2\omega_0$), причем их величина для переходов обоих типов примерно одна и та же. С другой стороны, функция $f(x)$ убывает при возрастании аргумента как x^{-2}, поэтому вкладом далеких переходов в (13) с точностью до $(\Delta/\omega_0)^2 \ll 1$ можно пренебречь.

Таким образом, $B_{\mu\mu'}$ определяется в основном свойствами одночастичных уровней у поверхности Ферми (в энергетическом интервале порядка Δ, так как, строго говоря, $\delta(\varepsilon_\nu)$ в (13) имеет именно такую ширину).

Прежде чем переходить к вычислению $B_{\mu\mu'}$ с использованием конкретной модели одночастичных уровней, проведем качественный анализ выражения (13). Во-первых, оценим вклад членов с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$. Как видно из (9), величина $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ зависит от степени усреднения матричного элемента $\langle\nu|q|\nu\rangle$ по группе уровней, лежащих на ширине Δ у поверхности Ферми. В осцилляторной модели $\langle nlm|q|nlm\rangle$ плавно меняется от уровня к уровню внутри оболочки (т. е. в энергетическом интервале $\sim n\omega_0\beta$), поэтому в случае $\Delta \ll n\omega_0\beta$ никакого усреднения на ширине Δ по существу не происходит. Количественные расчеты показывают, что в этом случае члены с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ в (13) практически полностью компенсируют основной член и $B_{\mu\mu'}$ оказывается очень малым. Осцилляторная модель представляет в этом смысле предельный случай максимального упорядочения уровней. В другом предельном случае естественно предположить полную хаотичность квантовых чисел для уровней внутри интервала Δ. Средняя величина $\langle\nu|q|\nu\rangle$ при этом оказывается малой, порядка деформации $\Delta R/R$, и вкладом членов с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ в (13) можно пренебречь, так как они приводят лишь к относительным поправкам $(\Delta R/R)^2 \sim A^{-2/3}$. Предположение о полной хаотичности уровней является слишком квазиклассическим для реальных ядер. Подобное наблюдалось бы лишь при деформациях $\Delta R/R \sim 1$, когда полностью исчезают всякие следы оболочечной структуры. Реальные ядра и в деформированном состоянии ($\Delta R/R \sim A^{-1/3}$) сохраняют некоторые следы упорядочения уровней. При этом члены с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ в (13) могут давать заметный, хотя и не решающий вклад в массовый коэффициент [1].

Имея в виду полукачественный характер анализа, ниже мы опускаем в (13) члены, содержащие $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$, и ограничиваемся исследованием основного члена:

$$B^0_{\mu\mu'} = \frac{\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_{\nu\nu'} f\left(\frac{\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right)\delta(\varepsilon_\nu)\langle\nu|q_\mu^*|\nu'\rangle\langle\nu'|q_{\mu'}^*|\nu\rangle. \qquad (13а)$$

Когда квантовые числа ν в (13а) пробегают все значения внутри одной оболочки, то матричный элемент $\langle\nu|q|\nu'\rangle$ изменяется на полную амплитуду. Так, в аксиальном ядре $\langle\nu|q_0|\nu\rangle$ меняется от максимального отрицательного значения до максимального положительного, проходя через нуль вблизи середины оболочки. Естественно поэтому, что выражение (13а) очень чувствительно к квантовым числам состояний ν, лежащих у поверхности Ферми, т. е. к схеме одночастичных уровней. С другой стороны, функция f в (13а) зависит лишь от энергии перехода и поэтому мало чувствительна к модели. Не очень существенным, по-видимому, является также выбор одночастичных функций для вычисления матричных элементов $\langle\nu|q_\mu|\nu'\rangle$, если их квантовые числа фиксированы.

Основной интерес представляет зависимость массовых коэффициентов от γ. В предельном случае идеальной квазиклассики (описанном выше) зависимость правой части (13а) от μ и μ' вследствие полного усреднения

[1] Согласно расчетам Беса [7], для случая β-колебаний эти члены дают поправку в B_β порядка 20—40%. Отметим, кстати, разнобой в оценке членов с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$, существующий в литературе. В работе [7] предварительная оценка проводится в осцилляторной модели. С другой стороны, Зарецкий и Урин [8] используют предположение о полной квазиклассичности, считая, что пространственное распределение частиц, населяющих уровни в ширине Δ у поверхности Ферми, совпадает с формой потенциала. Естественно, что эти оценки, соответствующие различным предельным случаям, дают противоположные результаты.

определяется лишь множителем $(-1)^{\mu'}\delta_{\mu,-\mu'}$. При этом инвариантные величины B_i $(i=0,1,2)$ в (5) и $B_{\beta\gamma}$ в (7) не будут зависеть от γ. Таким образом, вся зависимость этих величин от γ связана с остатками оболочечного упорядочения в деформированных ядрах. Ниже мы рассмотрим предельно упорядоченный случай — осцилляторную модель. Полученные в этой модели результаты позволят сделать качественные заключения о промежуточном случае реальных ядер.

3. Вычисления массовых коэффициентов в осцилляторной модели

Имея в виду тяжелые деформированные ядра, считаем осцилляторное квантовое число $n=n_1+n_2+n_3$ большим и пренебрегаем в дальнейшем членами $\sim 1/n$. Кроме того, будем пренебрегать при вычислении матричных элементов разностью частот по различным осям (т. е. членами $\sim(\omega_1-\omega_2)/\omega_0\sim A^{-1/3}$). Удобно считать квадрупольные моменты безразмерными, включив соответствующую размерную константу в параметр $\varkappa$. При сделанных приближениях имеем для диагональных матричных элементов значения

$$\langle\nu|q_{20}|\nu\rangle=3n_3-n,\quad \langle\nu|q_{2\pm2}|\nu\rangle=\sqrt{3/2}(n_1-n_2). \tag{14}$$

Недиагональные элементы (внутри оболочки) отличны от нуля для переходов с изменением пары квантовых чисел на ±1

$$\langle\nu|q_{2\pm1}|\nu'\rangle=\begin{cases}\mp(3/2n_1n_3)^{1/2} & \text{для } |n_1-n_1'|=1,\ |n_3-n_3'|=1\\ -i(3/2n_2n_3)^{1/2} & \text{для } |n_2-n_2'|=1,\ |n_3-n_3'|=1\end{cases}, \tag{14'}$$

$$\langle\nu|q_{2\pm2}|\nu'\rangle=\pm i(3/2n_1n_2)^{1/2} \text{ для } |n_2-n_2'|=1,\ |n_1-n_1'|=1;$$

Энергия одночастичных уровней в принятых обозначениях имеет вид

$$\varepsilon_\nu=\varepsilon(n_k)=\frac{2}{3}\varkappa\beta\left(nu-\sum_k n_k\cos\gamma_k\right), \tag{15}$$

где константа u связана с химическим потенциалом системы и зависит от числа частиц в рассматриваемой оболочке.

Используя (14) и (15), легко провести вычисление $B_{\mu\mu'}$ в (13), а также удобно исследовать инвариантные комбинации компонент $B_{\mu\mu'}$. Для B_0, B_1 и B_2, входящих в (5), имеем

$$B_1=-\frac{2\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_n\left(f_1\sin2\gamma_1n_2n_3+f_2\sin2\gamma_2n_3n_1+f_3\sin2\gamma_3n_1n_2\right)\frac{\delta(\varepsilon_\nu)}{\sin3\gamma}$$

$$B_2=-\frac{2\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_n\left(f_1\sin\gamma_1n_2n_3+f_2\sin\gamma_2n_3n_1+f_3\sin\gamma_3n_1n_2\right)\frac{\delta(\varepsilon_\nu)}{\sin3\gamma}, \tag{16}$$

$$B_0=\frac{\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_n\left(f_1n_2n_3+f_2n_3n_1+f_3n_1n_2\right)\delta(\varepsilon_\nu),$$

где $f_k=f(\omega_0\beta\sin\gamma_k/\sqrt{3}\,\Delta)$. Для величин (7) находим

$$B_\beta=\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_n\delta(\varepsilon_k)\left(\sum_\alpha n_\alpha\cos\gamma_\alpha\right)^2,$$

$$B_\gamma=\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_n\delta(\varepsilon_n)\left(\sum_\alpha n_\alpha\sin\gamma_\alpha\right)^2, \tag{17}$$

$$B_{\beta\gamma}=-\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2}{\Delta^2}\sum_n\delta(\varepsilon_n)\left(\sum_\alpha n_\alpha\cos\gamma_\alpha\right)\left(\sum n_\alpha\sin\gamma_\alpha\right)$$

Суммы в (16) и (17), берущиеся по состояниям внутри одной оболочки, с точностью до $1/n$ можно записать в виде интегралов по двум инвариантным переменным

$$x = \frac{1}{n}\sum_k n_k \cos\gamma_k, \qquad y = \frac{1}{n}\sum_k n_k \sin\gamma_k. \tag{18}$$

Тогда

$$\sum_n \delta(\varepsilon_n)\ldots \to \frac{2n^2}{3\sqrt{3}\,\varkappa\beta}\iint \delta(u-x)\ldots dx\,dy. \tag{18'}$$

Область интегрирования в (18′) имеет вид равностороннего треугольника (рис. 1), вписанного в окружность единичного радиуса, координаты вершин которого по осям x, y равны $\cos\gamma_k$, $\sin\gamma_k$. Пунктирной линией обозначена граница Ферми. Заштрихована занятая область.

В переменных (18) выражения для B_i $(i = 0, 1, 2)$ принимают вид

$$B_0 = \frac{\varkappa^2 n^4}{9\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n\sqrt{3})^{-1}\iint dx\,dy \times$$

$$\times\,\delta(u-x)\Big\{x^2\cos 3\gamma\sum_\alpha\frac{f_\alpha}{\cos\gamma_\alpha} -$$

$$-\,y^2\sin 3\gamma\sum_\alpha\frac{f_\alpha}{\sin\gamma_\alpha} + 4xy\sum_\alpha f_\alpha \times$$

$$\times\sin 2\gamma_\alpha - 2x\sum_\alpha f_\alpha\cos\gamma_\alpha -$$

$$-\,2y\sum_\alpha f_\alpha\sin\gamma_\alpha + \sum_\alpha f_\alpha\Big\}. \tag{19}$$

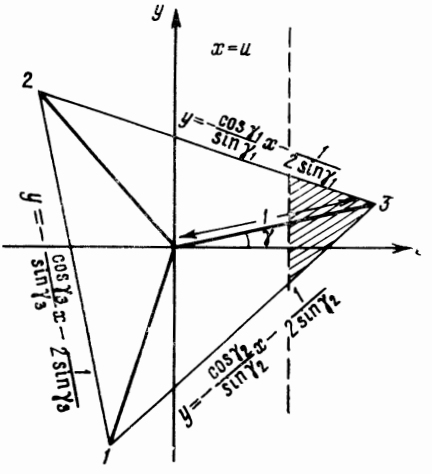


Рис. 1

Для B_1 и B_2 в (19) следует заменить функцию f_α соответственно на

$$-2f_\alpha\frac{\sin 2\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma}, \qquad -2f_\alpha\frac{\sin\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma}.$$

Выражения (17) принимают вид

$$B_\beta = \frac{4}{3}\frac{\varkappa^2 n^4}{\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n\sqrt{3})^{-1}\iint dx\,dy\delta(u-x)x^2,$$

$$B_\gamma = \frac{4}{3}\frac{\varkappa^2 n^4}{\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n\sqrt{3})^{-1}\iint dx\,dy\delta(u-x)y^2, \tag{20}$$

$$B_{\beta\gamma} = -\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2 n^4}{\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n\sqrt{3})^{-1}\iint dx\,dy\delta(u-x)xy.$$

После интегрирования в (20) находим

$$B_\beta = -\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2 n^4 u^2}{\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n)^{-1}\sum_\alpha\frac{u-\cos\gamma_\alpha}{|u-\cos\gamma_\alpha|}\frac{\sin\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma}(\cos\gamma_\alpha - u),$$

$$B_\gamma = -\frac{4}{9}\frac{\varkappa^2 n^4}{\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n)^{-1}\sum_\alpha\frac{u-\cos\gamma_\alpha}{|u-\cos\gamma_\alpha|}\frac{\sin\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma}(\cos\gamma_\alpha - u)\times$$

$$\times\left\{16\frac{\sin^4\gamma_\alpha}{\sin^2 3\gamma}\left(2u\cos\gamma_\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+u^2\operatorname{tg}\gamma_\alpha\operatorname{ctg}3\gamma-u\frac{\sin 2\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma}+\frac{\sin\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma}\right\} \tag{21}$$

$$B_{\beta\gamma}=-\frac{4}{3}\frac{\varkappa^2 n^4 u}{\omega_0^2\Delta^2}(\varkappa\beta n)^{-1}\sum_\alpha\frac{u-\cos\gamma_\alpha}{|u-\cos\gamma_\alpha|}\frac{\sin^3\gamma_\alpha}{\sin^2 3\gamma}\times$$

$$\times(\cos\gamma_\alpha-u)(1-4u\cos\gamma_\alpha).$$

Интегрирование в (19) также проводится элементарно, но ввиду громоздкости результата мы его не выписываем, ограничиваясь графическим представлением.

Условие сохранения числа частиц в оболочке N в инвариантном виде записывается как

$$\chi\equiv 1-\frac{2N}{n^2}=\frac{4}{3\sin 3\gamma}\sum_k\sin\gamma_k\frac{(u-\cos\gamma_k)^3}{|u-\cos\gamma_k|}, \tag{22}$$

откуда определяется u как функция γ и параметра заполнения χ. Для перехода к неинвариантной записи следует выбрать область изменения γ. При $0<\gamma<\pi/3$ имеем всегда

$$\frac{u-\cos\gamma_2}{|u-\cos\gamma_2|}=1,\qquad\frac{u-\cos\gamma_3}{|u-\cos\gamma_3|}=-1,$$

а величина $u-\cos\gamma_1$ может менять знак в зависимости от γ и χ. Поэтому существуют две области, в которых функциональная зависимость $B(\gamma,\chi)$ имеет различный вид. Граница между областями определяется уравнением $u(\gamma_1\chi)-\cos\gamma_1=0$. Переход от одной области к другой совершается путем преобразования

$$\chi\to-\chi,\ \gamma\to\pi/3-\gamma. \tag{23}$$

Из приведенных выше формул легко установить следующие свойства симметрии при преобразовании (23):

$$B_0\to B_0,\quad B_1\to -B_1,\quad B_2\to B_2,$$
$$B_\beta\to B_\beta,\quad B_\gamma\to B_\gamma,\quad B_{\beta\gamma}\to -B_{\beta\gamma}. \tag{24}$$

Выражения (19) и (21) определяют массовые коэффициенты как функции параметров деформации β, γ и фактора заполнения оболочки χ. Зависимость от β определяется, во-первых, функциями f, а во-вторых, общим множителем β^{-1}. Происхождение этого множителя легко понять. Массовые коэффициенты пропорциональны плотности уровней у поверхности Ферми ρ, которая в рассматриваемой модели одной осцилляторной оболочки обратно пропорциональна β. Напомним, что при вычислении было использовано условие малости Δ по сравнению с расщеплением оболочки $n\omega_0\beta$, поэтому переход к пределу $\beta=0$ незаконен. Очевидно, что в реальной модели ρ практически не зависит от β, поэтому общий множитель β^{-1} мы в дальнейшем учитывать не будем. Более существенная зависимость от β содержится в аргументах функции f, где β входит в комбинации с большим множителем, образуя параметр

$$x=\omega_0\beta/\sqrt{3}\Delta, \tag{25}$$

который для реальных ядер — порядка единицы. Ниже мы обсудим характер зависимости массовых коэффициентов, определяемых выражениями (19) и (21), от трех переменных γ, x и χ.

4. Обсуждение результатов

На рис. 2, *а, б* представлена зависимость B_0, B_1 и B_2 от γ при двух значениях параметра заполнения χ, равных 0,2 и 0,6. С учетом симметрии (23) те же графики определяют также поведение этих функций при χ, равных $-0{,}2$ и $-0{,}6$. Рис. 3, *а, б* иллюстрируют зависимость B_0, B_1 и B_2 от χ и x. Кривые *1, 2, 3* на всех рисунках соответствуют зависимостям B_0, B_1 и B_2.

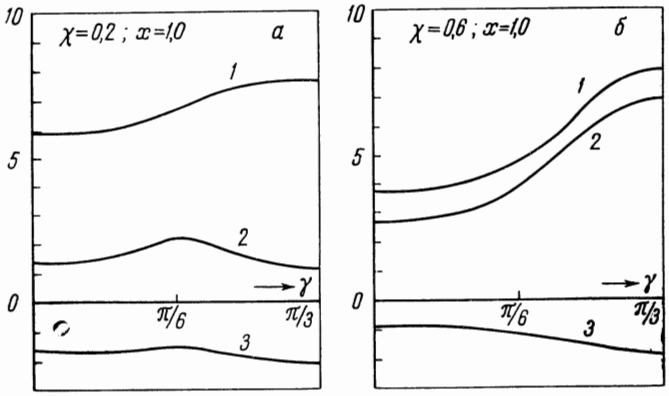


Рис. 2

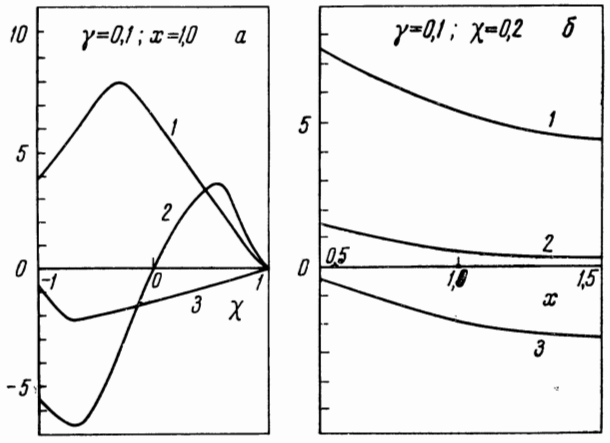


Рис. 3

Обратим внимание на следующие закономерности в поведении параметров кинетической энергии.

А. В середине оболочки ($|\chi| \ll 1$) B_0 значительно превосходит B_1 и B_2. При приближении к краям оболочки B_2 остается малым, в то время как B_1 может достигать или даже превосходить B_0.

Б. Зависимость всех рассматриваемых величин от γ является слабой в середине оболочки и становится более заметной (у B_0 и B_1) при приближении к краям.

В. Зависимость от x является плавной и не особенно существенной.

Г. Обращает на себя внимание резкая зависимость B_0 и B_1 от заполнения. Существенно, что B_1 имеет различный знак в начале и конце оболочки.

Перейдем теперь к анализу выражений для B_β, B_γ, $B_{\beta\gamma}$. Их зависимость от χ и γ (эти величины от x не зависят) представлена на рис. 4—7, из которых можно сделать следующие заключения.

Д. Относительная величина $B_{\beta\gamma}/B_\gamma$ оказывается очень малой не только при малых γ (что было бы естественно, так как при малых γ имеем $B_{\beta\gamma} \sim \gamma$), но и во всем интервале изменения γ. Величина B_β также заметно меньше B_γ, особенно вблизи середины оболочки, где в рассматриваемом приближении B_β обращается в нуль. Исключение составляет по-

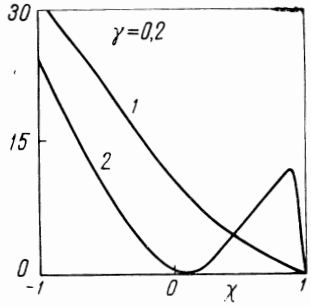


Рис. 4. Зависимость $B_\gamma(1)$ и $B_\beta(2)$ от заполнения оболочки

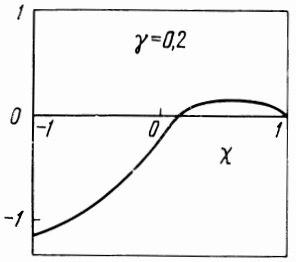


Рис. 5. Зависимость $B_{\beta\gamma}$ от заполнения оболочки

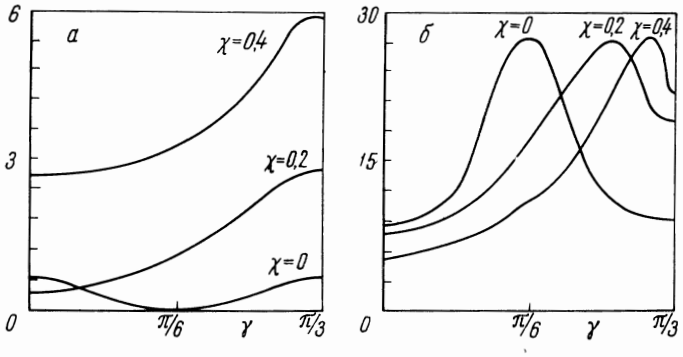


Рис. 6. B_β (*а*) и B_γ (*б*) как функции γ

следняя четверть оболочки при $\chi < 0$, либо первая при $\chi > 0$, где B_β обгоняет B_γ (см. рис. 4).

Е. Зависимость от γ оказывается очень сильной, особенно у B_γ, причем хорошей оказывается аппроксимация квадратным многочленом по $\cos 3\gamma$:

$$B_\beta = B_\beta^0(l_0 - l_1 \cos 3\gamma + \cos^2 3\gamma),$$
$$B_\gamma = B_\gamma^0(1 - K_1 \cos 3\gamma - K_2 \cos^2 3\gamma), \tag{26}$$

где $l_0 > 0$ и $K_2 > 0$, а K_1 и l_1 меняют знак в середине оболочки. Заметим, что в значительной части интервала изменения γ кривые могут быть интерполированы параболой. При положительном χ, в области малых γ:

$$B_\beta = B_\beta^0(1 + r_\beta\gamma^2), \quad B_\gamma = B_\gamma^0(1 + r_\gamma\gamma^2). \tag{27}$$

В рассмотренном приближении B_β и $B_{\beta\gamma}$ вблизи середины оболочки обращаются в нуль, что является простым следствием аналогичного поведения диагональных матричных элементов q_μ. Заметим, однако, что в области малых значений B_β, $B_{\beta\gamma}$ становятся существенными поправки к этим величинам, не учтенные ранее; поэтому следует учесть:

1) конечную ширину области одночастичных уровней, дающих вклад в B (среднее значение $|q|^2$ по области, шириной $\sim\Delta$, имеет конечную величину);

2) недиагональные переходы в соседнюю оболочку $(n \to n \pm 2)$;

3) зависимость одночастичных волновых функций от деформации (эти поправки гидродинамической природы имеют порядок $A^{-2/3}B_\gamma$ и практически не содержат зависимости от γ и заполнения).

С учетом отмеченных поправок следует считать, что величина B_β вблизи середины оболочки стремится не к нулю, а к некоторой малой постоянной величине.

Обсудим в заключение, насколько закономерным с точки зрения полученных результатов является использование в феноменологических моделях гидродинамического выражения для оператора кинетической энергии. Последнее получается из (2) в предположениях

$$\mathcal{F}_i = 4\beta^2 b_0 \sin^2 \gamma_i, \qquad (28а)$$

$$B_{\beta\gamma} = 0, \qquad (28б)$$

$$B_\beta = B_\gamma = b_0, \qquad (28в)$$

где b_0 — некоторая константа.

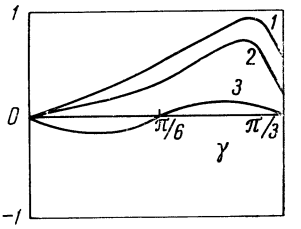


Рис. 7. $B_{\beta\gamma}$ как функция γ для значений $\chi=0$ (*1*), $\chi = 0{,}2$ (*2*) и $\chi = 0{,}4$ (*3*)

С точки зрения зависимости от γ предположение (28а) оказывается довольно хорошим для середины оболочки, где величина B_0 значительно превосходит B_1 и B_2, и очень слабо зависит от γ (см. заключения А, Б), так что общее выражение (5) переходит в (28а). Ближе к краям оболочки подобная аппроксимация становится сомнительной, так как заключения А и Б теряют силу.

Предположение (28б) оправдывается довольно хорошо практически во всем интервале изменений γ и параметра заполнения χ (см. заключение Д). Постоянство массовых коэффициентов B_β и B_γ можно оправдать (при $\chi \gtrsim 0$) лишь в узкой области вблизи $\gamma = 0$. Для реальных амплитуд γ-колебаний зависимость B_β и B_γ от γ становится существенной и особенно сильной для B_γ во второй половине оболочки, т. е. при $\chi < 0$ (параметр r_γ в (27) при этом значительно больше единицы). Таким образом, ни одно из равенств (28в) не может быть оправданным [2].

Предположения гидродинамической модели (28) оправдываются в предельном случае идеальной квазиклассики. Рассмотренный же случай осцилляторной модели представляет собой обратный предельный случай полного упорядочения одночастичных уровней.

Полученные результаты позволяют поэтому сделать заключения о степени и характере нарушений гидродинамических условий (28) для реальных ядер. Основными из них являются: отсутствие универсальной связи между параметрами $B_\beta B_\gamma$ и моментами инерции и сильная зависимость B_β, и особенно B_γ, от γ.

Литература

[1] G. Scharff-Goldhaber, J. Weneser. Phys. Rev., **98**, 219, 1955.

[2] L. Wilets, M. Jean. Phys. Rev., **107**, 788, 1959. T. Tamura, L. G. Komai. Phys. Rev. Lett., **3**, 344, 1959. T. Tamura, H. Yoshida. Nucl. Phys., **38**, 616, 1962. А. С. Давыдов, Г. Ф. Филиппов. ЖЭТФ, **35**, 440, 1958.

[3] S. T. Beljaev. Selected Topics in Nuclear Theory, Intern. Atomic Energy, Agency, Vienn, 1963, p. 291.

[4] A. Bohr, Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **26**, *14*, 1952.

[5] S. T. Beljaev. Mat-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **31**, *11*, 1959. А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, **37**, 249, 1959; Nucl. Phys., **13**, 655, 1959. L. Griffin, M. Rich. Phys. Rev., **118**, 850, 1960. S. G. Nilsson, O. Prior. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **32**, *16*, 1960.

---

[2] Следует отметить, однако, точное соотношение $\mathcal{F}_3 \approx 4\beta^2\gamma^2 B_\gamma$, справедливое при $\gamma \to 0$, и аналогичное соотношение при $\pi - \gamma \to 0$, которые следует учитывать при практическои аппроксимации B_β и γ.

[6] S. T. Beljaev. Nucl. Phys., 64, 17, 1965.
[7] D. Bés. Nucl. Phys., 49, 544, 1963.
[8] Д. Ф. Зарецкий, М. Урин. ЖЭТФ, 43, 1021, 1962.

STRUCTURE OF THE COLLECTIVE KINETICAL ENERGY IN A SIMPLE MICROSCOPICAL NUCLEAR MODEL

S. T. BELYAEV, B. A. RUMYANTSEV

The mass parameters of the collective hamiltonian for deformed nuclei are calculated as functions of β and γ and the number of nucleons in the highest unfilled shell, using a model taking pairing and quadrupole interactions in an oscillator potential well into account. The connection between the obtained hamiltonian and the hydrodynamical expression, used in phenomenological methods, is discussed.
