ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ СПЕКТРЕ НЕЧЕТНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

С. Т. БЕЛЯЕВ, В. Г. ЗЕЛЕВИНСКИЙ

(Поступила в редакцию 12 июня 1964 г.)

Рассмотрены возбуждения нечетного сферического ядра в предположении, что основным является взаимодействие нечетного нуклона с коллективными возбуждениями четного остова (фононами). Такое предположение оправдывается в случае адиабатичности коллективных возбуждений. Фонон-нуклонное взаимодействие не считается слабым. При суммировании графиков теории возмущений используется разложение по степени хаотичности в сложении промежуточных моментов. В некоторых предельных случаях найдены аналитические выражения для функции Грина в виде суммы бесконечного числа полюсных слагаемых. Обсуждаются физические проявления эффектов нуклон-фононного взаимодействия в нечетных ядрах.

1. Введение

Нижние возбужденные состояния сферических четно-четных ядер с достоверностью имеют коллективную природу [1]. Естественным кажется предположение, что нижние возбуждения нечетного ядра можно описать как результат взаимодействия нечетного нуклона с коллективными возбуждениями четного остова. Феноменологическому анализу экспериментальных данных на основе такой модели посвящается значительное число работ, особенно в последнее время [2]. Общая схема анализа примерно такова. Характеристики коллективных возбуждений остова заимствуются из экспериментальных данных для соседних четно-четных ядер. Константы взаимодействия нечетной частицы с остовом являются свободными параметрами. Из результатов анализа следует, что подобная простая картина в основном не противоречит экспериментальным фактам, хотя для объяснения вероятностей переходов приходится вводить дополнительные параметры (примеси к волновым функциям от других одночастотных состояний). При этом, к сожалению, число свободных параметров почти совпадает с числом данных, известных из эксперимента, так что нельзя сделать убедительного вывода о справедливости модели. В такой ситуации представляет большой интерес микроскопическое рассмотрение возбуждений нечетного ядра, при котором не требуется введения большого числа свободных констант.

Полностью согласованное рассмотрение должно включать исследование как коллективных возбуждений четного остова («фононов»), так и взаимодействия с ними нечетного нуклона. Однако по существу эти две задачи разделяются, так как изменением самих коллективных возбуждений от присутствия нечетного нуклона можно пренебречь. Другими словами, мы можем отождествить фононы нечетного ядра с аналогичными возбуждениями соседних четных ядер. Анализ свойств фононов и их взаимодействий между собой («ангармоничность») сам по себе является сложной задачей [3], однако для нахождения возбуждений нечетного ядра требуются лишь самые общие сведения о характере фононного спектра. Мы будем предполагать, что основным является взаимодействие между нечетным нуклоном и фононами, а взаимодействием между фононами, которое для ангармонических эффектов в четном ядре является определяющим, здесь можно пренебречь. Экспериментальные данные показывают, что такое предположение является разумным для большинства интересующих нас сферических ядер.

Рассмотрение лишь нуклон-фононного взаимодействия означает пренебрежение связью нечетного нуклона с одночастичными возбуждениями остова, которая описывается прямым (четырехфермионным) взаимодействием. Учет прямого взаимодействия приводит лишь к незначительной перестройке одночастичного спектра (смесь конфигураций), которая может оказаться существенной только в некоторых эффектах (например, магнитные моменты [4]). При рассмотрении коллективных эффектов это взаимодействие несущественно. Естественно, что четкое выделение коллективных эффектов возможно лишь в случае хорошей адиабатичности, когда частота фононов ω_0 значительно меньше энергии одночастичных возбуждений $2\bar{E}$. Ниже мы будем считать это условие выполненным. (Когда фононная частота ω_0 приближается к $2\bar{E}$, само понятие фонона теряет смысл и специфика этого взаимодействия исчезает.) Таким образом, мы будем рассматривать лишь коллективные эффекты, связанные со взаимодействием нуклонов через фононы. Прямое взаимодействие при необходимости должно учитываться дополнительно.

Эффективное взаимодействие нуклонов с фононами в ядре не является слабым, поэтому обычная теория возмущений [5] или обрезание на малом числе фононов [6] не являются обоснованными процедурами. Мы будем применять графическую технику (функции Грина), в которой наиболее просто и последовательно исследуются высшие приближения.

2. Система основных уравнений

Любой фейнмановский график в рассматриваемой системе взаимодействующих нуклонов и фононов строится из трех структурных элементов, аналитические выражения для которых получены в [7].

Функция Грина нуклона. При наличии куперовского спаривания необходимо рассматривать систему одночастичных функций Грина, которые удобно представить в виде одной (двухрядной) матричной функции

$$\hat{G}^0(\nu, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \hat{E}_\nu} \equiv \frac{\hat{A}_\nu}{\varepsilon - E_\nu} + \frac{\hat{B}_\nu}{\varepsilon + E_\nu}, \tag{2.1}$$

$$\hat{A}_\nu + \hat{B}_\nu = 1, \quad \hat{A}_\nu - \hat{B}_\nu = \hat{E}_\nu / E_\nu, \quad \hat{E}_\nu = \mathscr{E}_\nu \sigma^3 - \Delta_\nu \sigma^2,$$
$$\hat{E}_\nu^2 = E_\nu^2 = \mathscr{E}_\nu^2 + \Delta_\nu^2 \tag{2.1'}$$

(здесь и ниже σ^i — матрицы Паули; по поводу остальных обозначений см. [7]).

В дальнейшем будет удобно использовать также функцию Грина квазичастиц, которая получается из (2.1) с помощью канонического преобразования Боголюбова, т. е. действием матрицы $U_\nu = u_\nu + iv_\nu\sigma^1$. Это преобразование меняет лишь «направление» $\hat{E}_\nu$:

$$\hat{E}_\nu \longrightarrow \hat{U}_\nu \hat{E}_\nu \hat{U}_\nu^+ = (u_\nu + iv_\nu\sigma^1)\hat{E}_\nu(u_\nu - iv_\nu\sigma^1) = E_\nu\sigma^3, \tag{2.2}$$

а выражение (2.1) формально остается без изменений.

Функция Грина фонона. В представлении Фурье эта функция имеет обычный вид:

$$D^0(\omega) = 2\omega_0 / (\omega^2 - \omega_0^2). \tag{2.3}$$

Элементарная вершина нуклон-фононного взаимодействия (см. рис. 1) равна

$$\hat{\Gamma}_\mu^0(\nu_1\nu_1') = \Gamma^0(j_1 j_1')\,\hat{\sigma}_{11'}(-1)^{j_1 - m_1}\begin{pmatrix} j_1 & j_1' & 2 \\ m_1 & -m_1' & \mu \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $(\ldots)$ — $3j$-символ Вигнера.

Матрица $\hat{\sigma}_{11'}$ в представлении исходных частиц равна σ^3, а для квазичастиц преобразуется в

$$\hat{\sigma}_{11'} = U_1\sigma^3 U_{1'}{}^{+} = (u_1u_{1'} - v_1v_{1'})\sigma^3 + (u_1v_{1'} + v_1u_{1'})\sigma^2 \equiv$$
$$\equiv \xi_{11'}\sigma^3 + \eta_{11'}\sigma^2 = \hat{\sigma}_{1'1}. \qquad (2.5)$$

Оценка величины $\Gamma^0(j_1j_1')$ в нулевом порядке по параметру адиабатичности может быть получена из соотношений [7]

$$\Gamma^0(j_1j_1') = \gamma g_{11'}(-1)^{j_1'-1/2}, \qquad g_{11'} \sim [(2j_1+1)(2j_1'+1)]^{1/4}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} \approx \omega_0 \sum_{jj'} g_{11'}^2 \frac{E_jE_{j'} - \mathscr{E}_j\mathscr{E}_{j'} + \Delta_j\Delta_{j'}}{E_jE_{j'}(E_j + E_{j'})^3} \qquad (2.7)$$

Для грубой оценки можно считать, что

$$\gamma^{-2} \sim \omega_0(2\bar{E})^{-3}\Omega,$$

где $2\bar{E}$ — средняя энергия одночастичных возбуждений, а Ω — эффективное число одночастичных состояний, дающих вклад в коллективное возбуждение. Это число по порядку величины совпадает с числом состояний в оболочке ($\sim A^{2/3}$) и может практически полностью компенсировать малость адиабатического параметра $(\omega_0/2\bar{E})^3$. Поэтому

$$(\gamma/\omega_0)^2 \sim (2\bar{E}/\omega_0)^3\Omega^{-1} \sim 1. \qquad (2.8)$$

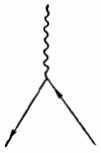


Рис. 1

Условие (2.8) мы положим в основу оценки различных графиков теории возмущений.

Функции Грина нуклона $\hat{G}$ и фонона D с учетом их взаимодействий удовлетворяют обычным уравнениям Дайсона:

$$\hat{G}(j, \varepsilon) = \hat{G}^0(j, \varepsilon) + \hat{G}^0(j, \varepsilon)\hat{M}(j, \varepsilon)\hat{G}(j, \varepsilon), \qquad (2.9)$$
$$D(\omega) = D^0(\omega) + D^0(\omega)\Pi(\omega)D(\omega). \qquad (2.10)$$

Собственноэнергетические части нуклона $\hat{M}$ и фонона Π можно выразить через полную вершинную часть $\hat{\Gamma}_\mu$. Так как зависимость вершинной части $\hat{\Gamma}_\mu(1, \varepsilon - \omega; 1', \varepsilon)$ от проекций моментов внешних линий является универсальной, удобно положить (2.11)

$$\hat{\Gamma}_\mu(1, \varepsilon - \omega; 1', \varepsilon) = \gamma g_{11'}(-1)^{j_1-m_1+j_1'-1/2} \begin{pmatrix} j_1 & j_1' & 2 \\ m_1 & -m_1' & \mu \end{pmatrix} \hat{\Gamma}(j_1, \varepsilon - \omega; j_1', \varepsilon).$$

Введенная таким образом скалярная матрица $\hat{\Gamma}$ является безразмерной и в нулевом приближении равна $\hat{\sigma}_{11'}$.

Собственноэнергетическая часть фонона $\Pi(\omega)$ содержит замкнутые нуклонные петли с суммированием по большому числу одночастичных состояний. Изменением $\Pi(\omega)$ от наличия выделенного нечетного нуклона можно при этом пренебречь. Считая, что структура фононов в четном ядре, т. е. решение уравнения (2.10), известно, мы в дальнейшем не будем рассматривать поправки к $D^0(\omega)$, полагая, что истинная функция Грина фонона $D(\omega)$ имеет ту же структуру (2.3), но с перенормированной частотой ω_0.

Для собственноэнергетической части нуклона $\hat{M}(j, \varepsilon)$ после суммирования по проекциям моментов внутренних линий находим

$$\hat{M}(j, \varepsilon) = \frac{\gamma^2}{2j+1}\sum_{j'}\hat{\sigma}_{jj'}g_{jj'}{}^2 i\int\frac{d\omega}{2\pi}D(\omega)\hat{G}(j', \varepsilon - \omega)\hat{\Gamma}(j', \varepsilon - \omega; j, \varepsilon). \qquad (2.12)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений (2.9) и (2.12), требуется сделать определенные предположения о величине $\hat{\Gamma}$.

3. Анализ графиков вершинной части

Рассмотрим сначала поправку к $\hat{\Gamma}$ наинизшего порядка (см. рис. 2), для которой после суммирования по проекциям находим

$$\hat{\Gamma}^{(1)}(j_1, \varepsilon-\omega; j_1', \varepsilon) = \gamma^2 \sum_{j_2 j_2'} \frac{g_{12}g_{22'}g_{2'1'}}{g_{11'}} \begin{Bmatrix} j_1 & 2 & j_1' \\ j_2' & 2 & j_2 \end{Bmatrix} (-1)^{j_2-j_2'} \times$$

$$\times\, i\int \frac{d\omega'}{2\pi} D(\omega')\, \hat{\sigma}_{12}\hat{G}(j_2, \varepsilon-\omega')\, \hat{\sigma}_{22'}G(j_2', \varepsilon-\omega-\omega')\, \hat{\sigma}_{2'1'}, \qquad (3.1)$$

где $\{\cdots\}$ — $6j$-символ.

Нас интересует вершинная часть $\hat{\Gamma}$ при значениях энергетических переменных $\varepsilon \sim \bar{E}$, $\omega \sim \omega_0$. Если переменная ε не близка к энергии E_j одного из одночастичных возбуждений, то в интеграле (3.1) можно считать по порядку величины $G \sim 1/\bar{E}$, что приводит к оценке

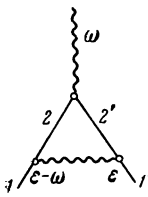


Рис. 2

$$\Gamma^{(1)} \sim \gamma^2 \sum g^2 \bar{E}^{-2} \{\ldots\}. \qquad (3.2)$$

Если бы под знаком суммы в (3.2) отсутствовал $6j$-символ, то в соответствии с (2.8) эта величина имела бы порядок $\bar{E}/\omega_0 \gg 1$. Наличие $\{\cdots\}$ приводит к резкому уменьшению величины суммы (2.7), во-первых, ввиду малости абсолютной величины $6j$-символа ($\sim 1/g^2$ при больших j), а, во-вторых, вследствие знакопеременности его как функции j_2, j_2'. Дать какие-либо общие буквенные оценки не представляется возможным, однако численные оценки суммы (3.2) показывают, что $\Gamma^{(1)} \ll 1$. Суммы подобного рода мы будем считать малыми. Это по существу является приближением хаотических фаз. Суммы, не содержащие знакопеременных величин типа $\{\cdots\}$, характерны для когерентных коллективных эффектов (см., например, (2.7)). Наличие же $\{\cdots\}$ полностью разрушает когерентность.

Проведенная оценка становится неприменимой, когда переменная ε лежит вблизи энергии одного из одночастичных уровней, например, E_0 (на расстояниях порядка $|\varepsilon - E_0| \leqslant \omega_0$). Тогда в (3.1) один из членов суммы («резонансный», $j = j_0$), для которого $G(j_0) \sim 1/\omega_0$, значительно превосходит остальные. В результате

$$\Gamma^{(1)}(j_1 j_1') \sim \gamma^2 \omega_0^{-2} g_{00}^2 \begin{Bmatrix} j_1 & 2 & j_1' \\ j_0 & 2 & j_0 \end{Bmatrix} \sim 1. \qquad (3.3)$$

Таким образом, резонансный вклад только от одного одночастичного уровня значительно превосходит суммарный, но некогерентный вклад от всей группы уровней.

Резонансная область ε в вершинной части $\hat{\Gamma}$ должна играть существенную роль при вычислении собственной энергии нуклона $\hat{M}$, где ε является фиксированной внешней переменной. Вклад же резонансных областей ε в фононную собственноэнергетическую часть II не играет принципиальной роли, так как при этом ε служит переменной интегрирования и меняется в широких пределах. Это и оправдывает сделанное выше предположение о том, что изменением структуры фонона от добавления нечетной частицы можно пренебречь.

Рассмотрим теперь высшие графики. Если отвлечься от геометрических факторов, возникающих от сложения промежуточных моментов, то легко установить, что все графики в Γ имеют один и тот же порядок, если все промежуточные состояния нуклона — резонансные (в нерезонансном случае все высшие графики $(2n+1)$-го порядка содержат дополнительные малые множители $(\omega_0/2\bar{E})^{2n}$). Вид геометрического фактора зависит от конкретного графика. Так, графики рис. 3, *а*, *б*, *в* содержат произведение

двух 6j-символов, а график рис. 3, $г$ — 9j-символ и т. д. Существенно, однако, что по мере усложнения геометрических факторов их величина довольно быстро падает. Для оценки рассмотрим случай одного резонансного уровня с $j \gg 1$. Тогда геометрический фактор $g^2\{\cdots\}$, входящий в (3.3), можно, согласно (2.6), оценить как

$$w = -(2j+1)\begin{Bmatrix} j & 2 & j \\ j & 2 & j \end{Bmatrix} \cong 1 - \frac{9}{j(j+1)}. \qquad (3.4)$$

Нетрудно убедиться, что с учетом только членов порядка j^{-2} все геометрические факторы могут быть представлены как некоторая степень (3.4). Так, фактор, содержащий 9j-символ, эквивалентен w^3, два фактора

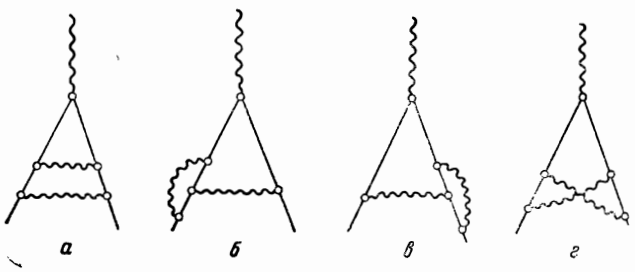


Рис. 3

с 12j-символами — w^4 и w^5 и т. д. Таким образом, в этом приближении сложность геометрических факторов характеризуется степенью эквивалентного выражения w^n.

Эти оценки показывают, что хотя при формальном переходе к пределу $j \to \infty$ все геометрические факторы обращаются в единицу, однако для фиксированного (хотя и большого) j они убывают с n. При наличии нескольких резонансных уровней это убывание становится еще более быстрым из-за дополнительной хаотичности в сложении моментов. Это открывает возможность дискриминации графиков по их геометрической структуре и использования степени ее сложности в качестве некоторого параметра разложения.

Естественно, что в общем случае нельзя указать необходимое число графиков в $\hat{\Gamma}$, которые следует учитывать для достижения желаемой точности, и этот вопрос может быть решен лишь при конкретных численных расчетах.

Одним предельным случаем является полное пренебрежение всеми графиками в $\hat{\Gamma}$, содержащими j-символы (случай полной хаотичности). Это эквивалентно замене $\hat{\Gamma}$ на затравочную вершину $\hat{\Gamma}^0$. Обратному предельному случаю отвечает замена всех геометрических факторов на единицу. Эти два случая определяют нижнюю и верхнюю границы для реальных решений. Как будет показано ниже, для одного резонансного уровня оба предельных случая допускают точное решение.

4. Исследование основных уравнений

Связь $\hat{M}$ с $\hat{G}$ и $\hat{\Gamma}$ (2.12) имеет интегральный характер, что приводит в общем случае к системе нелинейных интегральных уравнений от одной энергетической переменной. Можно, однако, показать, что с точностью до несущественных членов порядка $(\omega_0/2\bar{E})^2$ интегральные уравнения можно преобразовать в функциональные соотношения, не содержащие интегрирований.

Рассмотрим структуру графика произвольного порядка теории возмущений для $\hat{\Gamma}$ или $\hat{M}$. В принятом приближении (замкнутые нуклонные петли не рассматриваются) любой график состоит из одной сплошной

нуклонной линии с нанизанными на нее различными способами фононными линиями (рис. 4). Нетрудно видеть, что после соответствующего выбора внутренних переменных интегрирование по энергии любого промежуточного фонона затрагивает несколько нуклонных и только одну фононную функцию Грина, например,

$$\hat{I}_{12}(\varepsilon, \omega) = i\int \frac{d\omega'}{2\pi} D(\omega')\,\hat{G}_1^0(\varepsilon - \omega')\,\hat{\sigma}_{12}\hat{G}_2^0(\varepsilon - \omega - \omega'). \qquad (4.1)$$

Вычисляя этот интеграл с помощью (2.1), (2.3), найдем, что с точностью до членов порядка $(\omega_0/2\bar{E})^2$ результат интегрирования можно записать в виде

$$\hat{I}_{12}(\varepsilon, \omega) = \left(\frac{\hat{A}_1}{\varepsilon - E_1 - \omega_0} + \frac{\hat{B}_1}{\varepsilon + E_1 + \omega_0}\right)\hat{\sigma}_{12} \times$$
$$\times \left(\frac{\hat{A}_2}{\varepsilon - \omega - E_2 - \omega_0} + \frac{\hat{B}_2}{\varepsilon - \omega + E_2 + \omega_0}\right), \qquad (4.2)$$

т. е. интегрирование в (4.1) по существу эквивалентно сдвигу полюсов нуклонных функций Грина, при котором абсолютная величина полюса увеличивается на ω_0. Легко убедиться, что этот результат справедлив и для интегралов, содержащих произведение любого числа $\hat{G}^0$. Более того, для получения этого результата существенны лишь аналитические свойства $\hat{G}^0$. Поэтому естественно считать, что для величин $\hat{G}$, $\hat{M}$, $\hat{\Gamma}$, получающихся суммированием графиков рассматриваемого типа, справедливо правило интегрирования по энергии фононов, аналогичное (4.2):

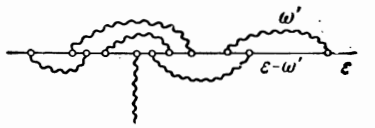


Рис. 4

$$i\int \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega)\,\hat{\Phi}(\varepsilon - \omega) = \hat{\Phi}(\varepsilon - \hat{\omega}_0), \qquad (4.3)$$

где добавка $-\hat{\omega}_0$ к аргументу $\hat{\Phi}$ здесь и в дальнейшем означает сдвиг всех положительных полюсов $\hat{\Phi}$ по данной переменной вправо на ω_0, а отрицательных — влево.

Используя соотношение (4.3), произведем интегрирование по ω в уравнении (2.12), после чего оно принимает вид

$$\hat{M}(j, \varepsilon) = \frac{\gamma^2}{2j+1}\sum_{j'} g_{jj'}{}^2\hat{\sigma}_{jj'}\hat{G}(j', \varepsilon - \hat{\omega}_0)\,\hat{\Gamma}(j', \varepsilon - \hat{\omega}_0; j, \varepsilon) \qquad (4.4)$$

(при применении (4.3) к функции $\Gamma(\varepsilon - \omega; \varepsilon)$ переменные ε и $\varepsilon - \omega$ следует рассматривать как независимые, и добавление ω_0 к одной из них сдвигает полюса только по этой переменной).

Дальнейший анализ значительно упрощается, если рассматривать функции Грина квазичастиц. В этом случае матрица $\hat{G}^0$ дигональна (см. (2.2)). Вершина Γ^0 в этом представлении выражается в виде суммы (2.5) диагонального и недиагонального членов, причем их вклад в графики оказывается принципиально различным. Ограничимся пока диагональной частью $\hat{\Gamma}^0$ ($\sim \sigma^3$). Тогда нуклонная линия в любом графике нигде не меняет своего направления, и матричная система распадается на два независимых уравнения для квазичастицы и квазидырки. Получающаяся при учете только диагональной части $\hat{\Gamma}^0$ полная вершинная часть также диагональна.

Включение недиагональных частей Γ^0 меняет направление нуклонной линии, причем каждое изменение направления внутренней линии превра-

щает резонансный знаменатель $\varepsilon - E \sim \omega_0$ в нерезонансный $\varepsilon + E \sim 2E$. Поэтому такие графики в Г в принятом приближении учитывать не следует [1].

Таким образом, для учета резонансных членов мы приходим к следующей системе уравнений для функции Грина квазичастицы (не содержащей никаких матриц):

$$G^{-1}(j, \varepsilon) = \varepsilon - E_j - M(j, \varepsilon), \qquad (4.5')$$

$$M(j, \varepsilon) = \frac{\gamma^2}{2j+1} \sum_{j'} g^2_{jj'} \xi_{jj'} G(j', \varepsilon - \omega_0)\, \Gamma(j', \varepsilon - \omega_0; j, \varepsilon) \qquad (4.5'')$$

(сдвиг аргумента функций G и Г в (4.5) следует понимать в прямом смысле).

Система уравнений (4.5) имеет уже достаточно простую структуру и решения ее для конкретных ядер могут быть найдены численно при учете в Г нескольких первых членов разложения по степени сложности геометрического фактора [2].

Характер решений ясен из физических соображений. Полюса функции Грина $G(j, \varepsilon)$ определяют энергии возбужденных состояний с моментом $J = j$. В отсутствие взаимодействия основное состояние ядра отвечает нечетному нуклону на уровне $j = j_0$, а последовательные возбужденные состояния, кроме нуклона, содержат 1, 2, 3 и т. д. фононов. При включении взаимодействия все эти состояния перемешиваются, и говорить об определенном числе фононов можно лишь очень условно. Кроме того, появляются также примеси других одночастичных состояний с $j \neq j_0$ (которые особенно существенны, когда $|E_j - E_{j_0}| \lesssim \omega_0$). Функция Грина $G(j_0, \varepsilon)$, являющаяся решением системы (4.5), содержит полюса, отвечающие всем возбужденным состояниям указанного типа с моментом $J = j_0$.

Для состояний с другими моментами $j \neq j_0$ необходимо определить полюса функции Грина $G(j, \varepsilon)$. Заметим, что даже в том случае, когда одночастичное состояние с данным моментом j и энергией E_j лежит высоко, функция Грина $G(j, \varepsilon)$ все же может иметь низколежащий полюс (типа нуклон в основном состоянии j_0 плюс фононы). Нетрудно видеть, что уровень этого типа можно определять из полюса $M(j, \varepsilon)$. Действительно, если в (4.5′) $E_{j \neq j_0} \to \infty$, $\varepsilon \sim E_{j_0} + \omega_0$, то полюса $G(j, \varepsilon)$ и $M(j, \varepsilon)$ фактически совпадают. Этим обстоятельством можно воспользоваться и в том случае, когда одночастичного уровня с рассматриваемым моментом j вообще нет в данной оболочке.

5. Точные решения

Здесь мы рассмотрим два частных случая, допускающих точное решение, которые не только позволяют исследовать общую структуру функций Грина для нашей задачи, но и имеют самостоятельный физический интерес. Оба примера относятся к одному («резонансному») одночастичному уровню и представляют два противоположных предельных случая относительно геометрической хаотичности.

А. «Максимальная хаотичность». В нулевом приближении мы можем заменить Г на Γ^0, но нас будет интересовать также первая поправка, поэтому мы сохраним сначала в Г все члены, содержащие $6j$-символы, но не содержащие более высоких геометрических факторов.

[1] Все нерезонансные поправки к нуклонной собственноэнергетической части $\hat{M}$ можно вычислять, используя для $\hat{\Gamma}$ только нулевое приближение. Эта (нерезонансная) часть $\hat{M}$ очень слабо зависит от ε и может считаться константой. В дальнейшем мы не будем учитывать этот не представляющий принципиального интереса член, предполагая его включенным в энергию квазичастицы E_j.

[2] Формально это разложение имеет тот же вид, что и в теории возмущений, но каждой внутренней линии соответствует точная функция Грина G.

Нетрудно убедиться, что учет всей совокупности графиков, содержащих только нулевой член и $6j$-символы, приводит к интегральному уравнению для Γ, изображенному графически на рис. 5. Производя интегрирование в последнем члене согласно (4.3), мы приходим к следующему функциональному уравнению (индекс j_0 опущен):

$$\xi^{-1}\Gamma(\varepsilon-\omega,\varepsilon)=1-\gamma^2\begin{Bmatrix} j_0 & 2 & j_0\\ j_0 & 2 & j_0\end{Bmatrix}\xi^{-1}\Gamma(\varepsilon-\omega,\varepsilon-\omega-\omega_0)\times$$

$$\times G(\varepsilon-\omega-\omega_0)\Gamma(\varepsilon-\omega-\omega_0,\varepsilon-\omega_0)\;G(\varepsilon-\omega_0)\Gamma(\varepsilon-\omega_0,\varepsilon). \quad (5.1)$$

В выражение для собственноэнергетической части M (4.5″) функция Γ входит лишь при $\omega=\omega_0$. При этом значении переменной уравнение (5.1) можно записать в следующем виде:

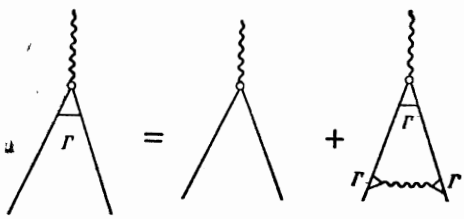


Рис. 5

$$\xi^{-1}\Gamma(\varepsilon-\omega_0,\varepsilon)\equiv\xi^{-1}\Gamma=$$
$$=1+\xi^{-3}\alpha w\Gamma'G''\Gamma'G'\Gamma, \quad (5.2)$$

где w дается формулой (3.4), $\alpha=\gamma^2g^2\xi^2/(2j_0+1)$, а штрихом обозначается сдвиг энергетической переменной ε на величину ω_0, например $G'=G(\varepsilon-\omega_0)$, $\Gamma'=\Gamma(\varepsilon-2\omega_0,\varepsilon-\omega_0)=\Gamma(\varepsilon-\omega_0,\varepsilon-2\omega_0)$ и т. д. В этих же обозначениях уравнение (4.5″) принимает вид

$$M=\alpha G'\Gamma/\xi. \quad (5.3)$$

Исключая Γ из (5.2) и (5.3), получим уравнение

$$\alpha M^{-1}=G'^{-1}-\alpha^{-1}wM'G''^{-1}M', \quad (5.4)$$

которое совместно с уравнением Дайсона (4.5′) определяет M и G.

Для анализа исключим из (5.4), (4.5′) функцию G и запишем получающееся уравнение для M в виде бесконечного ряда

$$\alpha M^{-1}=\varepsilon-E-\omega_0-M'\left[1+w+\frac{w^2}{\alpha}M''M'+\frac{w^3}{\alpha^2}M''M'''M''M'+\ldots\right]. \quad (5.5)$$

Легко видеть, что итерационный ряд в квадратных скобках (5.5) должен быстро сходиться. Действительно, вследствие роста числа штрихов далекие члены ряда убывают вблизи полюса M как $(\alpha w/\omega_0^2)^k/k!(k+1)!$, т. е. как ряд для функции Бесселя J_1.

Обозначим ряд в квадратных скобках (5.5) через λ. При малых w величина $\lambda=1+w$, т. е. сводится к постоянной. Остальные члены ряда могут давать резкую зависимость от ε лишь в очень узких областях, так как полюса $M^{(n+1)}$ расположены близко к нулям $M^{(n)}$. В приближении постоянного λ решение (5.5) может быть получено аналитически.

В этом приближении, как видно из структуры (5.5), полюса $M^{(n+1)}$ точно совпадают с нулями $M^{(n)}$, поэтому мы можем искать решение в виде

$$M(\varepsilon)=cF(\varepsilon-\omega_0)/F(\varepsilon)\equiv cF'/F, \quad (5.6)$$

где F — целая функция. Подставляя это выражение в (5.5), мы получим линейное ($\lambda=$ const!) функциональное уравнение для F, которое по форме совпадает с рекуррентным соотношением для функций Бесселя. Это

позволяет получить окончательный ответ в виде

$$M(\varepsilon) = \sqrt{\alpha/\lambda}\, J_p(\zeta) / J_{p-1}(\zeta), \qquad p = 1 - (\varepsilon - E)/\omega_0, \qquad \zeta = -2\sqrt{\alpha\lambda/\omega_0^2}. \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в уравнение Дайсона (4,5′), находим после некоторых преобразований выражение для функции Грина нуклона:

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda}} \frac{J_{p-1}(\zeta)}{J_{p-2}(\zeta) + (1 - 1/\lambda) J_p(\zeta)}. \tag{5.8}$$

Функция Бесселя $J_p(\zeta)$ как функция индекса p имеет при вещественных $\zeta \neq 0$ бесконечное число отрицательных вещественных корней $p = -p_n$. Поэтому функция Грина (5.8) имеет бесконечное число полюсов в точках $\varepsilon = \varepsilon_n$, отвечающих энергиям возбужденных состояний системы. Найденное решение точное в пределе «максимальной хаотичности», когда все геометрические факторы обращаются в нуль ($\lambda \to 1$).

Б. Обратный предельный случай соответствует замене всех геометрических факторов w_n их максимальным значением, равным единице. При этом все графики в точности совпадают с аналогичными графиками для нуклонов, взаимодействующих со скалярными фононами. В последнем случае справедливо разностное соотношение Уорда [3]:

$$G^{-1}(\varepsilon) - G^{-1}(\varepsilon - \omega) = D^{0-1}(\omega) D(\omega) \omega \xi^{-1} \Gamma(\varepsilon - \omega, \varepsilon), \tag{5.9}$$

которое в рассматриваемом нами приближении (фононы не перенормируются, $D = D^0$) дает недостающую связь между Γ и G, замыкая систему уравнений (4.5).

Исключая Γ и M из (4.5), (6.10), получаем уравнение для функции Грина:

$$\left(\varepsilon - E + \frac{\alpha}{\omega_0}\right) G - \frac{\alpha}{\omega_0} G' = 1. \tag{5.10}$$

Это функциональное уравнение является линейным и решение его, как легко проверить, имеет вид

$$G(\varepsilon) = e^{-\alpha/\omega_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\omega_0^2)^n}{n!} \frac{1}{\varepsilon - E + (\alpha/\omega_0) - n\omega_0}. \tag{5.11}$$

Последнее выражение имеет наглядный физический смысл. Система обладает бесконечным числом уровней, которые в данном случае эквидистантны. Вычет в каждом полюсе определяет долю голого нуклона в данном состоянии. Как видно из (5.11), примеси бесфононного состояния распределены по закону Пуассона, причем это состояние дает максимальный вклад в уровень с $n \sim \bar{n} = \alpha/\omega_0^2$. Другими словами, при $\alpha/\omega_0^2 \gtrsim 1$ основное состояние полностью меняет свою «бесфононную» природу.

В общем случае $w \neq 1$ точного соотношения Уорда типа (5.9) не существует. Это связано с тем, что в случае квадрупольных фононов внешняя фононная линия, кроме энергии, вносит в график дополнительный момент, т. е. неаддитивную переменную. Поэтому результирующий график и не разбивается на два слагаемых. Однако при малых значениях $1 - w$ удается получить приближенную связь Γ с G в виде разложения по $1 - w$, так что в принципе рассмотренный метод позволяет учесть также и поправки, связанные с геометрией [4].

---

[3] Вывод (5.9) может быть проведен, например, способом, аналогичным использованному в [8] для системы электронов и фононов в металле.

[4] Рассматриваемое приближение малых значений $1 - w$ может иметь практический интерес для изолированного одночастичного уровня с большим значением момента j. Чистым случаем подобного рода является уровень с четностью, отличной от основной четности данной оболочки (например, $h_{11/2}$ в оболочке $N = 5$). Мы предполагаем рассмотреть этот случай более подробно в другом месте.

Как было показано выше, уровни с моментами, отличными от спина основного состояния, находятся из полюсов собственноэнергетической части $M(\varepsilon)$. Когда мы рассматриваем только один одночастичный уровень, то внутренняя структура M одна и та же для всех моментов, а зависимость от J содержится лишь в геометрических факторах входной и выходной вершин. В чистых случаях А и Б (соответственно $w_n = 0$ и $w_n = 1$) M не зависит от момента и все состояния с $J \neq j_0$ вырождены. Состояния с $J = j_0$ отщепляются, так как их энергии определяются другим уравнением (из полюсов G). Уровни с $J \neq j_0$ не содержат бесфононных состояний, поэтому при слабом взаимодействии наинизшим оказывается уровень с $J = j_0$ (в основном бесфононный). Однако при росте константы связи вклад бесфононного состояния в этот уровень падает (см. выше). Поэтому следует ожидать, что энергетическое различие между основным ($J = j_0$) и первыми возбужденными состояниями с $J \neq j_0$ должно уменьшаться. В сказанном легко убедиться, рассматривая асимптотические выражения G и M при больших α.

Формула (5.11) для G может быть записана через неполную гамма-функцию $\gamma(a, b)$. Используя для нее асимптотическое разложение, получаем

$$G(x) = -\omega_0 e^{-\alpha/\omega_0^2}\left(-\frac{\alpha}{\omega_0^2}\right)^x \gamma\left(-x, -\frac{\alpha}{\omega_0^2}\right) \approx$$

$$\approx -\omega_0 \left[\frac{\omega_0^2}{\alpha} + e^{-\alpha/\omega_0^2}\left(-\frac{\alpha}{\omega_0^2}\right)^x \Gamma(-x)\right], \qquad (5.12)$$

где $x = (\varepsilon - E)/\omega_0 + \alpha/\omega_0^2$, а $\Gamma(-x)$ — гамма-функция. Отсюда находим для M:

$$M(x) \approx x - \frac{\alpha}{\omega_0^2} + \omega_0\left[\frac{\omega_0^2}{\alpha} + e^{-\alpha/\omega_0^2}\left(-\frac{\alpha}{\omega_0^2}\right)^x \Gamma(-x)\right]^{-1}. \qquad (5.13)$$

Из (5.12) и (5.13) нетрудно видеть, что полюса M и G совпадают с точностью до $\exp(-\alpha/\omega_0^2)$. Учет геометрических факторов может привести при этом к инверсии уровней с $J = j_0$ и $J \neq j_0$.

Сравнение случаев А и Б показывает, что качественная картина решений по существу одна и та же. Нетрудно убедиться, что при малой константе связи ($\alpha/\omega_0^2 \ll 1$) и учете первых геометрических поправок оба случая приводят к одному и тому же выражению для функции Грина:

$$G(\varepsilon) \approx \frac{1 - \alpha/\omega_0^2}{\varepsilon - E + \alpha/\omega_0} + \frac{\alpha/\omega_0^2}{\varepsilon - E - \omega_0 + \alpha w/\omega_0}. \qquad (5.14)$$

Различие между случаями А и Б будет проявляться лишь в следующих полюсах, вычеты в которых имеют более высокий порядок по α/ω_0^2. С другой стороны, расстояния между далекими полюсами также совпадают в обоих случаях, что легко показать, рассматривая в (5.8) асимптотические значения функций Бесселя при большом индексе.

Заметим, что реальный случай произвольной хаотичности является промежуточным между А и Б. Поэтому существование конечных решений в этих крайних случаях доказывает также сходимость разложения по хаотичности.

6. Заключение

1. Уравнения, полученные выше, открывают возможность учета фонон-нуклонного взаимодействия, не прибегая к теории возмущений по константе связи. Точно решенные частные случаи позволяют сделать качественное сравнение с результатами феноменологической модели [2]

(см. Введение). Очевидно, что эта модель дает лишь очень грубое описание, справедливое, строго говоря, только при достаточно малой константе связи.

Напомним, что эффективное взаимодействие нечетного нуклона с коллективным возбуждением остова в феноменологической модели [2] описывается некоторым потенциалом. На самом деле эта величина (фонон-нуклонный четырехполюсник I) существенно зависит от передаваемой энергии, что эквивалентно сильно запаздывающему взаимодействию. Поэтому, в частности, оказывается неверным общее утверждение, сформулированное де-Шалитом [2], о том, что однофононный дублет, построен-

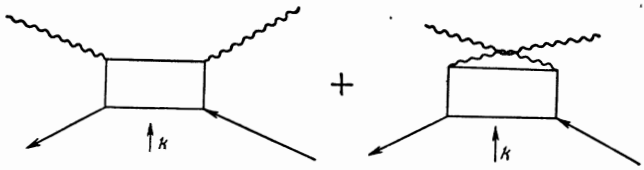


Рис. 6

ный на однонуклонном состоянии с $j = 1/2$, не расщепляется при квадрупольном взаимодействии. Действительно, каждому графику, дающему вклад в четырехполюсник I, соответствует аналогичный график обменного типа (рис. 6). Эти графики отличаются только характеристиками внешних линий. Суммарный вклад этих графиков можно записать в виде

$$\sum_k \{I_k(\varepsilon, \omega_1, \omega_2) + (-1)^k I_k(\varepsilon - \omega_1 - \omega_2, -\omega_2, -\omega_1)\}, \qquad (6.1)$$

где I_k относится к четырехполюснику с определенным моментом k в аннигиляционном канале. Если I_k является постоянной, то в сумме (6.1) исчезают нечетные моменты. В случае $j = 1/2$ при этом остается единственное слагаемое $k = 0$, которое, естественно, не приводит к расщеплению фонон-нуклонного дублета ($J = 3/2, 5/2$). Так как взаимодействие передается фононами, то функция $I_k(\varepsilon)$ на самом деле существенно меняется при сдвиге аргумента на величину порядка ω_0. Поэтому член с $k = 1$ в сумме (6.1) не является малым.

2. Случай ядер со спином основного состояния $J_0 = j_0 = 1/2$ с точки зрения полученных выше уравнений является выделенным, так как при поглощении фонона нуклон вынужден переходить в одночастичные состояния с другим моментом. В этом случае в любом графике (например, рис. 4) внутренние «резонансные» нуклонные состояния обязательно чередуются с «нерезонансными». Если одночастичные уровни с $j \neq j_0 = 1/2$ лежат не слишком близко, то отбирая в вершинной части Г графики с максимально возможным числом резонансных линий и наибольшими по численной величине геометрическими факторами (в данном случае они включают $6j$-символ $\left\{\begin{matrix} 3/2 & 2 & 1/2 \\ 5/2 & 2 & 11/2 \end{matrix}\right\}$), легко получить функциональные уравнения типа (5.1) для энергий уровней с моментами $J = 3/2, 5/2$. Простая структура этих уравнений позволяет сделать общие качественные заключения о порядке уровней первого возбужденного дублета ($J = 3/2, 5/2$), который обычно должен совпадать с порядком соответствующих одночастичных состояний ($j = 3/2, 5/2$). Имеющиеся экспериментальные данные (для изотопов Se^{77}, Rh^{103}, $Ag^{107, 109}$, $Xe^{127, 129}$, $Te^{121, 123, 125}$, Pt^{195}, Hg^{199}, Tl и др.) подтверждают этот вывод.

3. Взаимодействие квазичастицы с коллективными возбуждениями должно привести к заметным эффектам практически во всех наблюдаемых характеристиках нижних состояний нечетных ядер, в том числе и в тех, которые в основном являются одночастичными.

Интересным примером может служить изомерный сдвиг атомных уровней. Изменение радиуса распределения заряда $\langle R^2 \rangle$ связывают обычно [9] с различием в состояниях нечетного нуклона. Для нейтрона этот эффект равен нулю (если не учитывать магнитного взаимодействия). Примеси фононных состояний также приводят к изменению $\langle R^2 \rangle$. Из-за большого различия спинов основного и метастабильного состояний среднее число фононов может сильно отличаться [5], причем этот коллективный эффект имеет один и тот же порядок для нечетного протона и нечетного нейтрона. Такой механизм подтверждается измерениями с помощью мессбауэров-

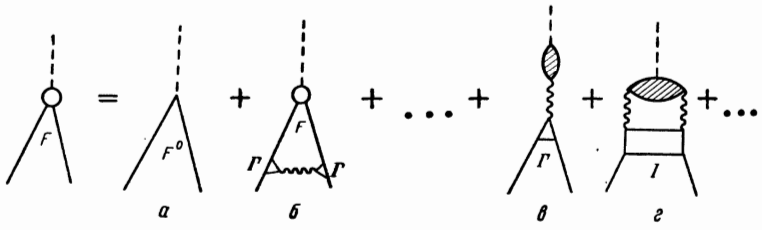


Рис. 7

ской техники изомерного сдвига в ядре Hg^{197} [10]. Примесь «фононного облака» в одночастичных состояниях будет сказываться и на относительных вероятностях образования основного или возбужденных состояний конечного ядра в реакциях срыва и подхвата, а также в β-распаде нечетных ядер. Эти вероятности можно непосредственно связать с вычетами в полюсах функции Грина нечетного нуклона (см. например, (5.11)).

4. Наибольший интерес при сравнении с экспериментом представляют квадрупольные и магнитные моменты ядер и вероятности электромагнитных переходов. Для их вычисления следует найти эффективное взаимодействие системы с внешним полем соответствующей мультипольности. Полная вершина $F_L(\omega)$ такого взаимодействия определяется совокупностью графиков, изображенных на рис. 6.

График на рис. 7, *а* изображает полную электромагнитную вершину для нуклона в ядре без учета взаимодействия с фононами; графики на рис. 7, *б* дают ее изменение вследствие этого взаимодействия. В случае дипольного поля ($L = 1$) и $\omega = 0$ график рис. 7, *а* включает все (в том числе спин-орбитальные) одночастичные поправки к шмидтовскому значению магнитного момента (об их вычислении см. [4]). Графики рис. 7, *б* в этом случае дают дополнительную перенормировку магнитного момента. Простые оценки, аналогичные (3.2), показывают, что в резонансном случае эти поправки отнюдь не малы ($\sim \gamma^2 / \omega_0^2 \sim 1$). По-видимому, еще более чувствительны к этим поправкам вероятности $M1$-переходов, определяемые вершиной F_1 ($\omega \neq 0$). Важно отметить, что подобные коллективные графики должны характеризоваться плавной зависимостью от заполнения и систематически расти с увеличением «коллективизации» (уменьшением ω_0). Действительно, как показано в [11], такая тенденция существует и весьма ярко проявляется в увеличении экспериментальных значений матричных элементов так называемых «*l*-запрещенных» $M1$-переходов при удалении от замкнутых оболочек. Отметим, что для объяснения этих эффектов оказывается недостаточным учет связи с фононами в простейшем однофононном приближении [12].

Вклад графика рис. 7, *в* отличен от нуля для случая квадрупольной вершины ($L = 2$). Заштрихованная петля связана с вероятностью $B(E2;\ 2^+ \to 0)$ в четном ядре и должна вычисляться с учетом ангармоничности [3]. Поскольку этот переход по порядку величины в Ω раз уси-

[5] На это наше внимание обратил Д. П. Гречухин.

лен по сравнению с одночастичными оценками, а его энергия (равная ω_0) близка к энергии изучаемых $E2$-переходов нечетного ядра, именно этот график дает основной вклад в наблюдаемые вероятности переходов.

Следует отметить, что наибольшего отличия от соответствующей вероятности в четном ядре надо ожидать для переходов в основное состояние из первого возбужденного с тем же моментом. Эта вероятность может быть существенно ослаблена из-за наличия в возбужденном состоянии бесфононной компоненты. Такой вывод подтверждается результатами по кулоновскому возбуждению [13].

Наконец, графики типа приведенного на рис. 7, *г* в электромагнитной вершине F_L учитывают воздействие внешнего поля на фонон и также связаны с ангармоническими эффектами. Для $L = 1$ график рис. 7, *г* дает поправки, связанные с гиромагнитным отношением фонона ($g_c \sim Z/A$).

5. Полученные выше решения в предельных случаях А и Б представляют также некоторый методический интерес, так как их вид находится в определенном противоречии с обычными утверждениями о характере особенностей одночастичных функций Грина. Для бесконечных систем известно утверждение о том, что массовый оператор M не имеет полюсов (или только один в случае куперовского спаривания — см., например, [14]). Для конечных систем, строго говоря, этот вывод несправедлив из-за дискретности уровней в ферми-зоне; однако это отличие мало существенно (вместо интеграла, не имеющего особенности,— сумма по большому числу близких полюсов). Набор полюсов в полученных нами решениях имеет принципиально другое происхождение. В принципе подобные решения возможны и в бесконечной системе, если существуют коллективные возбуждения, характеризуемые не импульсом, а некоторым дискретным параметром (например, моментом). Правда, такие возбуждения из-за малости статистического объема не могут представлять интереса. В ядре же нас интересуют не статистические характеристики, а индивидуальные уровни, и учет таких состояний необходим.

Из сказанного можно заключить, что при перенесении общих результатов, справедливых в макроскопических системах, на ядра требуется определенная осторожность. Это относится, в частности, к использованию одночастичной функции Грина теории ферми-жидкости (содержащей лишь одно полюсное слагаемое) в качестве точной однонуклонной функции ядра.

Литература

[1] S. T. Belyaev. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **31**, *11*, 1959. С. Т. Беляев. ЖЭТФ, **39**, 1387, 1960.
[2] R. D. Lawson, J. L. Uretzky. Phys. Rev., **108**, 1300, 1957. A. de Shalit. Phys. Rev., **122**, 1530, 1962. A. Braunstein, A. de Shalit. Phys. Lett., **1**, 264, 1962.
[3] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. ЖЭТФ, **42**, 1590, 1962; Nucl. Phys., **39**, 582, 1962; Изв. АН СССР, серия физ., **28**, 127, 1964.
[4] А. Б. Мигдал. Магнитные моменты ядер, Препринт ИАЭ, М., 1963.
[5] L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **32**, *9*, 1960.
[6] L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen. Rev. Mod. Phys., **35**, 854, 1963.
[7] С. Т. Беляев. Ядерная физика, этот выпуск, стр. 3.
[8] S. Engelsberg, J. R. Schriffer. Phys. Rev., **131**, 993, 1963.
[9] R. Weiner. Phys. Rev., **114**, 256, 1959.
[10] A. G. Melissinos, S. P. Davis. Phys. Rev., **115**, 130, 1959.
[11] Э. Е. Берлович, Г. М. Букат. Изв. АН СССР, серия физ., **28**, 214, 1964.
[12] R. A. Sorensen. Phys. Rev., **132**, 2270, 1963.
[13] Д. Г. Алхазов, К. И. Ерохина, И. Х. Лемберг, Ю. И. Удралов. Программа и тезисы докладов XIV ежегодного совещания по ядерной спектроскопии в Тбилиси, стр. 95, 1964.
[14] С. В. Малеев. ЖЭТФ, **41**, 1675, 1961.

ON THE ENERGY SPECTRUM OF ODD A — SPHERICAL NUCLEI

S. T. BELYAEV, V. G. ZELEVINSKY

Excitations of odd — A spherical nuclei are considered, assuming that the basical interaction is that of the odd nucleon with collective excitations of the even core (phonons). Such an assumption is justified for adiabatical collective excitations. The phonon-nucleon interaction is not considered to be weak. In some limiting cases, analytical experessions for the Green functions are found, in the form of sums over an infinite number of pole terms. Physical cousequences of the nucleon-phonon interactions in odd — A nuclei are discussed.