НУКЛОН-ФОНОННЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

С. Т. БЕЛЯЕВ

(Поступила в редакцию 12 июня 1964 г.)

Для модели сферического ядра с простым остаточным взаимодействием нуклонов (куперовское спаривание плюс квадрупольное взаимодействие) методом функций Грина получен модельный гамильтониан, содержащий нуклоны и коллективные возбуждения — фононы. Рассмотрено искажение пропагатора фонона и нуклон-фононной вершинной части при включении других видов взаимодействия. Использование нуклон-фононного гамильтониана существенно упрощает исследование многочастичных корреляций в сферических ядрах.

1. В последнее время значительный прогресс в теоретическом объяснении спектров сферических ядер был достигнут на основе оболочечной модели с учетом лишь наиболее существенной части остаточного взаимодействия нуклонов — куперовского спаривания и «квадрупольного» взаимодействия [1, 2]. Основное состояние четно-четного ядра описывается при этом как «конденсат» нуклонных куперовских пар с моментом $J = 0$. Если не учитывать взаимодействие другого типа, то возбуждения в такой системе будут иметь щель, равную энергии связи куперовской пары E_0. Однако квадрупольное взаимодействие связывает нуклоны разорванной пары в момент $J = 2$, сильно понижая энергию возбуждения ($E_2 \ll E_0$) [3]. Феноменологически эти возбуждения, имеющие коллективный характер, могут быть описаны как колебания квадрупольного момента нуклонов. По внешним характеристикам они совпадают с гидродинамическими поверхностными колебаниями, но имеют принципиально иную природу. Параметры первых возбужденных состояний четных ядер вполне удовлетворительно предсказываются такой моделью [2].

Вопрос о высших возбужденных состояниях является более сложным, так как с экспериментальной точки зрения основной интерес представляют «ангармонические» эффекты, т. е. результат взаимодействия между квадрупольными парами нуклонов. Строгое микроскопическое описание этих эффектов требует рассмотрения высших корреляционных функций (функций Грина четырех и более частиц), что связано с большими вычислительными трудностями. Между тем величина «ангармоничности» (энергия взаимодействия возбужденных пар) в наиболее интересном случае хорошей адиабатичности ($E_2 \ll E_0$) значительно меньше энергии связи квадрупольной пары $E_0 - E_2$ (хотя может быть сравнима с E_2). В такой ситуации можно считать, что связанная квадрупольная пара является устойчивым образованием («фонон») и взаимодействует с другими парами (или отдельным нуклоном) как целое. В этом случае проблему определения спектра высших возбуждений ядра можно разбить на две последовательные задачи: 1) нахождение вида фононов и их взаимодействия с нуклонами, 2) определение спектра возбуждений в модельной системе, состоящей из фононов (и, может быть, отдельных несвязанных нуклонов).

Целью настоящей работы является решение первой из указанных задач. В исходной системе взаимодействующих нуклонов путем вычисления двухчастичной функции Грина находится связанное квадрупольное состояние пары нуклонов. Считая, что найденная функция Грина описы-

вает распространение элементарного коллективного возбуждения — фонона, мы можем найти функцию распространения фонона и его эффективное взаимодействие с нуклонами (вершинную часть). В случае хорошей адиабатичности фонон-нуклонное взаимодействие оказывается незапаздывающим и может быть описано модельным гамильтонианом.

2. Формализм функций Грина в приложении к ядру рассматривался в ряде работ (см., например, [3, 4]). Здесь мы ограничимся лишь самыми необходимыми результатами, сформулировав их в матричном виде, что позволит сделать дальнейшее изложение значительно более компактным и удобным.

В системе с куперовским спариванием необходимо рассматривать одночастичные функции трех типов:

$$G(12) = -i\langle Ta_1a_2^+\rangle, \quad F(12) = -i\langle Ta_1a_2\rangle,$$
$$F^+(12) = -i\langle Ta_1^+a_2^+)\rangle, \tag{1}$$

где a, a^+ — фермиевские операторы уничтожения и рождения. Удобно ввести комбинированные операторы

$$\Psi(\nu) = \begin{pmatrix} a_\nu \\ ia_{\tilde\nu}^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi^+(\nu) = (a_\nu^+ - ia_{\tilde\nu}), \tag{2}$$

где ν и $\tilde\nu$ — одночастичные состояния, переходящие друг в друга при обращении времени ($\hat T$):

$$|\tilde\nu\rangle = \langle\nu|\hat T^{-1}, \qquad |\tilde{\tilde\nu}\rangle = -|\nu\rangle. \tag{3}$$

В сферическом ядре можно положить

$$|\nu\rangle = |n, j, m\rangle, \quad |\tilde\nu\rangle = (-1)^{j-m}|n, j, -m\rangle. \tag{3'}$$

где j, m — момент частицы и его проекция, а n — остальные квантовые числа [1].

Составленная из (2) матричная функция Грина

$$\hat G(\nu\nu') = -i\langle T\{\Psi(\nu)\Psi^+(\nu')\}\rangle \tag{4}$$

содержит всю совокупность обычных функций (1). В фурье-представлении

$$\hat G(\nu\nu';\ \varepsilon) = \begin{pmatrix} G(\nu\nu';\ \varepsilon) & -iF(\nu\tilde\nu';\ \varepsilon) \\ iF^+(\tilde\nu\nu';\ -\varepsilon) & -G(\tilde\nu'\tilde\nu;\ -\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{4'}$$

Функция Грина невзаимодействующих частиц $\hat G^0$ диагональна и в фурье-представлении имеет вид

$$\hat G^0(\nu\nu';\ \varepsilon) = [\varepsilon - \sigma^3\varepsilon^0(\nu\nu')]^{-1}, \tag{5}$$

где $\varepsilon^0(\nu\nu') = \varepsilon^0(\tilde\nu'\tilde\nu)$ — матричные элементы одночастичного гамильтониана, отсчитанные от границы Ферми, а σ^k ($k = 1, 2, 3$) — матрицы Паули. (Ниже используется также четвертая матрица $\sigma^0 = 1$.)

Уравнение Дайсона в матричном представлении имеет вид

$$\hat G = \hat G^0 + \hat G^0\hat\Sigma\hat G, \tag{6}$$

---

[1] В дальнейшем мы будем иметь дело только с $\Psi(\nu)$ и относить ν сразу к паре сопряженных состояний, т. е. в $\Psi(\nu)$ аргумент ν пробегает лишь значения с $m > 0$. При этом для Ψ и Ψ^+ имеет место обычное правило антикоммутации $[\Psi(\nu), \Psi^+(\nu')]_- = \delta_{\nu\nu'}$.

где матрица $\hat{\Sigma}$ содержит собственноэнергетическую часть обычного типа Σ_{11} и величины Σ_{20} и Σ_{02}, связанные с куперовским спариванием:

$$\hat{\Sigma}(\nu\nu';\ \varepsilon) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(\nu\nu';\ \varepsilon) & i\Sigma_{20}(\nu\tilde{\nu}';\ \varepsilon) \\ -i\Sigma_{02}(\tilde{\nu}\nu';\ -\varepsilon) & -\Sigma_{11}(\tilde{\nu}'\tilde{\nu};\ -\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Величина $\hat{\Sigma}(\varepsilon)$ не имеет особенностей вблизи поверхности Ферми, поэтому мы можем в (6) использовать $\Sigma(0)$. Считаем теперь, что

$$\varepsilon^0(\nu\nu') + \Sigma_{11}(\nu\nu') = \varepsilon_\nu \delta_{\nu\nu'}. \tag{8}$$

Это соответствует выбору в качестве $|\nu\rangle$ собственных функций самосогласованного одночастичного гамильтониана $\varepsilon^0 + \Sigma_{11}$. Полагаем, кроме того (что является хорошим приближением для ядра), что куперовское спаривание характеризуется константой [2)]

$$\Sigma_{02} = \Sigma_{20}^* = -\Sigma_{20} = \Delta. \tag{8'}$$

С учетом (8) и (8′) функция Грина находится из (6) в виде

$$\hat{G}(\nu,\ \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_\nu \sigma^3 + \Delta\sigma^2} \equiv \frac{1}{\varepsilon - \hat{E}_\nu}, \tag{9}$$

что можно преобразовать также к виду

$$\hat{G}(\nu,\ \varepsilon) = \frac{\hat{A}(\nu)}{\varepsilon - E_\nu} + \frac{\hat{B}(\nu)}{\varepsilon + E_\nu}, \tag{10}$$

где

$$E_\nu^2 = \varepsilon_\nu^2 + \Delta^2,$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 1, \quad \hat{A} - \hat{B} = \frac{\varepsilon}{E}\sigma^3 - \frac{\Delta}{E}\sigma^2 = \frac{\hat{E}}{E}. \tag{10'}$$

Одночастичные функций Грина определяют спектр одночастичных возбуждений. **Коллективные возбуждения** определяются из полюсов двухчастичных функций.

3. В представлении (2) **все типы** двухчастичных функций объединяются в одной матричной **функции**

$$\hat{K}(12;\ 34) = -i\langle T\{\Psi(1)\Psi^+(2)\Psi(3)\Psi^+(4)\}\rangle, \tag{11}$$

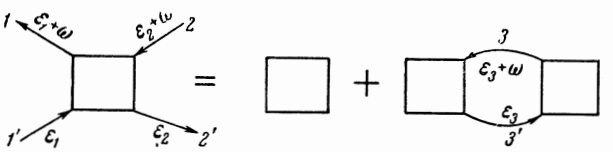
уравнение для которой имеет вид

$$\hat{K} = -i\hat{G}\hat{G} - i\hat{G}\hat{G}\hat{I}^0\hat{K}. \tag{12}$$

Здесь $\hat{I}^0$ — неприводимый четырехполюсник. Введем полный (приводимый) четырехполюсник $\hat{I}$, связанный с $\hat{K}$ соотношением

$$\hat{K} = -i\hat{G}\hat{G} - \hat{G}\hat{G}\hat{I}\hat{G}\hat{G},$$

для которого, согласно (12), имеем уравнение (см. рисунок)



[2)] Фактически ниже используется лишь условие диагональности $\Delta(\nu\nu') = \delta_{\nu\nu'}\Delta_\nu$, где Δ_ν может зависеть от состояния. Фаза Δ_ν не входит в физические величины и может быть выбрана произвольно. Ниже параметр Δ считается действительным.

$$\hat{I}(11'\varepsilon_1;\, 2'2\varepsilon_2;\, \omega) = \hat{I}^0(11'\varepsilon_1;\, 2'2\varepsilon_2;\, \omega) - i\hat{I}^0(11'\varepsilon_1;\, 3'3\varepsilon_3;\, \omega) \times$$
$$\times \hat{G}(3,\, \varepsilon_3 + \omega)\hat{G}(3',\varepsilon_3)\hat{I}(33'\varepsilon_3;\, 2'2\varepsilon_2;\, \omega). \qquad (13)$$

(Смысл аргументов и способ перемножения матриц легко усмотреть из рисунка. Подразумевается суммирование по 3 и $3'(\equiv \nu_3, \nu_3')$ и интегрирование по $\varepsilon_3 / 2\pi$.)

Нас будут интересовать особенности (полюса) $\hat{I}(\omega)$, лежащие вблизи границы Ферми. Поэтому все части $\hat{I}(\omega)$, не содержащие таких особенностей, можно заранее включить в $\hat{I}^0$ и использовать значение последней при $\omega = 0$. Интегрирование в (13) по ε_3 проходит по области порядка одночастичной энергии E (определяемой фактором $\hat{G}(\varepsilon_3 + \omega)\hat{G}(\varepsilon_3)$). Естественно считать $\hat{I}^0$ в этой области постоянной, так как $\hat{I}^0(\varepsilon)$ существенно меняется в интервале порядка энергии Ферми. Выделим явно матричную структуру входящих в (13) величин, положив для I (и аналогично для $\hat{I}^0$)

$$\hat{I}(11';\, 2'2) = {}^1/_2\sigma_1{}^i I_{i,k}(11';\, 2'2)\sigma_2{}^k. \qquad (14)$$

В результате уравнение (13) записывается в виде

$$I_{i,k} = I^0_{i,k} + I^0_{i,l}K^0_{l,n}I_{n,k}, \qquad (15)$$

где введено обозначение

$$K^0_{i,k}(11';\, \omega) = -\frac{i}{2}\int \frac{d\varepsilon}{2\pi}\,\mathrm{Sp}\,\{\sigma^i\hat{G}(1,\, \varepsilon + \omega)\,\sigma^k\hat{G}(1',\, \varepsilon)\}. \qquad (15')$$

Подставляя в (15') явное выражение для $\hat{G}$ (10), после простых вычислений найдем

$$K^0_{i,k}(11';\, \omega) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\chi_i{}^*(11')\chi_k(11')}{\omega - E_{11'}} - \frac{\chi_i(1'1)\chi_k{}^*(1'1)}{\omega + E_{11'}}\right\}. \qquad (16)$$

Здесь $E_{11'} = E_1 + E_{1'}$, а компоненты «векторов»

$$\chi_i(11') = \{\chi_0,\, \chi_1,\, \chi_2,\, \chi_3\} = \{\eta^{(-)}_{11'},\, i\xi^{(-)}_{11'},\, \xi^{(+)}_{11'},\, \eta^{(+)}_{11'}\} \qquad (16')$$

выражаются через u, v — коэффициенты преобразования Боголюбова ($u^2 - v^2 = \varepsilon / E$; $2uv = \Delta / E$) — посредством соотношений

$$\xi_{12}{}^{(\pm)} = u_1u_2 \mp v_1v_2, \qquad \eta_{12}{}^{(\pm)} = u_1v_2 \pm v_1u_2. \qquad (17)$$

При вычислениях удобно воспользоваться выражениями для билинейных комбинаций (17):

$$\eta_{12}{}^{(\pm)2} = 1 - \xi_{12}{}^{(\pm)2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{E_1E_2} \pm \frac{\Delta_1\Delta_2}{E_1E_2}\right];$$

$$\eta_{12}{}^{(+)}\eta_{12}{}^{(-)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{E_1} - \frac{\varepsilon_2}{E_2}\right); \qquad \xi_{12}{}^{(+)}\xi_{12}{}^{(-)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{E_1} + \frac{\varepsilon_2}{E_2}\right); \qquad (17')$$

$$\xi_{12}{}^{(\pm)}\eta_{12}{}^{(\pm)} = \frac{\varepsilon_1\Delta_2 \pm \varepsilon_2\Delta_1}{2E_1E_2}; \qquad \xi_{12}{}^{(\mp)}\eta_{12}{}^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_2}{E_2} \pm \frac{\Delta_1}{E_1}\right).$$

В сферическом ядре ξ и η, а следовательно, и $K_{i,k}{}^0$ не зависят от проекций одночастичных моментов m. Зависимость же от m четырехполюсников I, I^0 определяется $3j$-символами Вигнера:

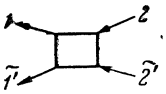
$$I_{i,k}(11';\, 2'2) = 2\sum_J (2J+1)\,(-1)^{j_1-m_1}\begin{pmatrix} j_1 & J & j_1' \\ -m_1 & \mu & m_1' \end{pmatrix} \times$$
$$\times\, I_{i,k}(11';\, 2'2;\, J)\,(-1)^{j_2-m_2}\begin{pmatrix} j_2 & J & j_2' \\ -m_2 & \mu & m_2' \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

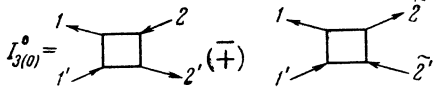
Здесь $I(J)$ не зависит от проекций моментов. Подставляя (18) в (15) и используя свойство ортогональности $3j$-символов, получим уравнение для $I_{i,k}(J)$, по форме совпадающее с (15):

$$I_{i,k}(11';\,2'2;\,J) = I^0_{i,k}(11';\,2'2;\,J) + I^0_{i,l}(11';\,3'3;\,J)K_{l,n}(33') \times$$

$$\times I_{n,k}(33';\,2'2;\,J). \tag{19}$$

4. Рассмотрим теперь более детально структуру неприводимого четырехполюсника (эффективного взаимодействия) $\hat{I}^0$. Можно считать, что $\hat{I}^0$ всегда содержит два входящих и два выходящих конца[3]. Это означает, что отличны от нуля лишь шесть элементов матрицы $\hat{I}^0$, обладающих этим свойством. С учетом симметрии относительно инверсии времени эти элементы попарно равны. В представлении (14) $I_{i,k}{}^0$ оказывается диагональным, $I_{i,k}{}^0 = \delta_{ik} I_k{}^0$, причем

$I_1^0 = I_2^0 =$ 

$I_{3(0)}^0 =$  $(\mp)$ (20)

Каждый четырехполюсник в правой части (20) равен своему T-сопряженному (получающемуся обращением всех линий $1 \to \tilde{1}$ и т. д.) и, кроме того, обладает обычными свойствами симметрии относительно перестановок эквивалентных концов. Это позволяет установить определенные соотношения для величин $I^0(J)$, входящих в (18):

$$I_k{}^0(11';\,2'2;\,J) = (-1)^{j_2 - j_{2'} - J} I_k{}^0(11';\,22';\,J), \qquad k \neq 0;$$

$$I_0{}^0(11';\,2'2;\,J) = -(-1)^{j_2 - j_{2'} - J} I_0{}^0(11';\,22';\,J) \tag{21}$$

и аналогичные свойства для перестановок первых двух аргументов.

Как видно из (20), $I_1{}^0 = I_2{}^0$ описывают взаимодействие двух частиц (или двух дырок), в то время как $I_3{}^0$ и $I_0{}^0$ — взаимодействие частицы и дырки. Физическое различие между $I_3{}^0$ и $I_0{}^0$ легко установить, считая, что взаимодействие между нуклонами у поверхности Ферми можно описать некоторым эффективным потенциалом V_{12}. Разлагая его по сферическим тензорным операторам, имеем

$$V_{12} = \sum_J v_{12}{}^J (Q^J(1)\, Q^J(2)). \tag{22}$$

Потенциал V_{12} не меняется при обращении времени, но каждый из тензоров Q^J может быть как четной, так и нечетной величиной относительно T-инверсии. Легко видеть, что в первом случае V_{12} будет давать вклад только в $I_3{}^0$, а во втором — только в $I_0{}^0$. T-нечетный тензор можно образовать, используя оператор спина нуклона. Таким образом, $I_3{}^0$ и $I_0{}^0$ являются аналогами обычного и зависящего от спина взаимодействий.

---

[3] Вообще говоря, I^0 включает сложные графики, не обладающие этим свойством (с внутренними петлями типа GF). Однако анализ показывает, что вклад таких графиков мал (при симметричном расположении уровней у поверхности Ферми обращается в нуль).

5. Для решения уравнения (19) необходимо сделать определенные предположения о зависимости четырехполюсников (21) от своих аргументов.

Сделаем сначала допущение о возможности приближенной факторизации I^0, т. е. [4]

$$I_k^0(11'; 2'2; J) \approx \varkappa_k(J) g_k(11'; J) g_k(22'; J) \equiv \varkappa_k g_k(1) g_k(2). \qquad (23)$$

Подставляя (23) в уравнение (19) и очевидным образом упрощая обозначения, получаем

$$I_{i,k}(1; 2) = \delta_{ik}\varkappa_k g_k(1) g_k(2) + \varkappa_i g_i(1) R_{i,k}(2), \qquad (24)$$

$$R_{i,k}(2) = \sum_{3,l} g_i(3) K_{i,l}(3) I_{l,k}(3; 2).$$

Это уравнение вследствие вырожденности ядра сводится к системе алгебраических уравнений для $R_{i,k}$:

$$(\delta_{il} - L_{il}) R_{l,k}(2) = L_{ik} g_k(2), \qquad (25)$$

где

$$L_{ik} = \sum_1 g_i(1) K^0_{i,k}(1) g_k(1) \varkappa_k. \qquad (26)$$

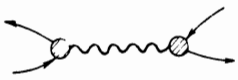
Решение (25) можно символически представить в виде

$$R(2) = (1 - L)^{-1} L g(2), \qquad (27)$$

откуда с учетом (24) находим для I

$$I(1; 2) = \varkappa g(1) g(2) + \varkappa g(1) (1 - L)^{-1} L g(2). \qquad (28)$$

Первый член в (28) описывает прямое («затравочное») взаимодействие нуклонов, а последний член, имеющий полюс при энергии коллективного возбуждения $\omega = \omega_0$, можно трактовать как взаимодействие через обмен коллективным «возбуждоном» (фононом) и изображать графиком

$I^0 =$  $= \Gamma D \Gamma$ (29)

Здесь $D(\omega)$ — функция возбуждения фонона, а Γ — нуклон-фононная вершинная часть. Нашей задачей является определение явного вида D и Γ.

6. Рассмотрим структуру матрицы (26). Как видно из (16), зависимость компонент $K^0_{i,k}$ от ω определяется множителями двух типов. Для $i, k = 0, 1$ или $i, k = 2, 3$ имеем $K^0_{i,k} \sim E / (E^2 - \omega^2)$, а для компонент смешанного типа ($i = 0, 1$, $k = 2, 3$ либо наоборот) $K^0_{i,k} \sim \omega / (E^2 - \omega^2)$. (Появление нечетной степени ω указывает на различную временную четность пар компонент 0, 1 и 2, 3, что для компонент 0 и 3 было установлено выше.) Заметим также, что входящая в $K^0_{i,k}$ величина $\xi_{12}^{(+)}$ (17) меняет знак на границе Ферми ($v \leftrightarrow u$), поэтому при суммировании по одночастичным состояниям в (26) компоненты L_{ik}, содержащие $\xi^{(+)}$ линейно,

---

[4] Приближение (23) можно обосновать для взаимодействия, определяемого короткодействующим потенциалом [5]. В этом случае основную зависимость от j дают матричные элементы от тензорных операторов Q^J (22), т. е. известные геометрические факторы. При этом три аргумента у $g_k(jj'; J)$ связаны обычными правилами отбора для моментов, поведение при перестановке j и j' определяется из (21), а абсолютная величина g_k при больших j не зависит от k и равна $[(2j + 1)(2j' + 1)]^{1/4}$.

окажутся малыми. Из сказанного следует, что матрица L_{ik} имеет следующую структуру:

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & & \sim \omega/E \\ L_{10} & L_{11} & & \\ & & L_{22} & \sim \overline{\xi^{(+)}} \\ \sim \omega/E & & \sim \overline{\xi^{(+)}} & L_{33} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

В случае хорошей адиабатичности возбуждения ($\omega / E \ll 1$) компоненты с различной T-четностью разделяются. Связь последних двух компонент также оказывается слабой ($\sim \xi^{(+)}$). С этой точностью система (25) разбивается на три отдельных уравнения соответственно для компонент 0—1, 2 и 3. Основной интерес представляет последняя ветвь, так как именно она с успехом описывает коллективные квадрупольные ($J = 2$) возбуждения реальных ядер. Энергия этих возбуждений ω_0 определяется из уравнения

$$L_{33}(\omega_0) = -\varkappa_3 \sum_{11'} \frac{g_{11'}^2 \eta_{11'}^{(+)2} E_{11'}}{E_{11'}^2 - \omega_0^2} = 1, \tag{31}$$

где введена величина $g_{\nu\nu'} = (-)^{j_\nu' - 1/2} g_3(\nu\nu'; 2)$, вследствие (21) симметричная относительно своих аргументов.

Из (31) видно, что найденные возбуждения существуют при отрицательных $\varkappa_3$. Сохраняя только компоненты L_{33}, имеем из (28)

$$I_{3,3}(1; 2) = \varkappa_3 g(1) g(2) + \varkappa_3 g(1) \frac{L_{33}(\omega)}{1 - L_{33}(\omega)} g(2). \tag{32}$$

Используя (31), преобразуем последний член в (32) к виду

$$I_{3,3}^c = \varkappa_3 g(1) \varphi(\omega) \frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \varphi(\omega) g(2) \varkappa_3, \tag{33}$$

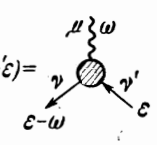
где $\varphi(\omega)$ определяется из соотношения

$$\varphi^2(\omega) = \sum_{11'} \frac{g_{11'}^2 \eta_{11'}^{(+)2} E_{11'}}{E_{11'}^2 - \omega^2} \Big/ 2\omega_0(-\varkappa_3) \sum_{22'} \frac{g_{22'}^2 \eta_{22'}^{(+)2} E_{22'}}{(E_{22'}^2 - \omega^2)(E_{22'}^2 - \omega_0^2)}. \tag{34}$$

Множители выражения (33) легко сопоставить с соответствующими элементами графика (29). Функция распространения фонона имеет обычную форму:

$$D(\omega) = 2\omega_0 / (\omega^2 - \omega_0^2). \tag{35}$$

Для получения нуклон-фононной вершинной части следует восстановить в (33) матричную структуру и зависимость от проекций моментов, согласно (14) и (18). В результате найдем

$\hat{\Gamma}_\mu^0(\nu\varepsilon - \omega; \nu'\varepsilon) =$ 

, (36а)

$$\hat{\Gamma}_\mu^0(\nu\varepsilon - \omega; \nu'\varepsilon) = -\sqrt{5}\varkappa_3 \varphi(\omega) g_{\nu\nu'} \sigma^3 (-1)^{m_\nu' + 1/2} \begin{pmatrix} j_\nu & 2 & j_\nu' \\ m_\nu & \mu & -m_\nu' \end{pmatrix}. \tag{36б}$$

Функция $\varphi(\omega)$ имеет смысл формфактора нуклон-фононного взаимодействия. Зависимость φ от ω начинает проявляться при ω порядка энер-

тии одночастичных возбуждений E. При $\omega \sim \omega_0 \ll E$ величину φ можно считать константой.

7. Исследуем теперь вопрос о законности аппроксимации (23) для четырехполюсника I^0. Заметим, что свойства фононов — коллективных возбуждений — определяются суммами по широкой области одночастичных состояний и поэтому практически не зависят от детального поведения функции $I^0(1; 2)$. Для вершинной части подобное утверждение, вообще говоря, несправедливо, так как здесь $I^0(1; 2)$ определяет характеристики внешних нуклонных концов. Рассмотрим поэтому поправки, связанные с отличием I^0 от (23). Одновременно мы включим в рассмотрение другие типы взаимодействий, не учтенные в (35) и (36).

Перепишем уравнение (19) в виде

$$I - PI = I^0 + \varkappa g g K^0 I, \tag{37}$$

где мы ввели урезанное ядро

$$P_{i,k}(1; 2) = [I_i^0(1; 2) - \delta_{i3}\varkappa_3 g(1) g(2)] K_{i,k}(2). \tag{38}$$

Обозначим через $X_{i,k}(1, 2)$ решение уравнения

$$X - PX = 1. \tag{39}$$

Тогда из (37) следует

$$I = X(I^0 + \varkappa g g K^0 I).$$

Это уравнение для I с вырожденным ядром, разрешая которое мы найдем выражение I через X:

$$I_{i,k} = X_{i,k} I_k^0 + \varkappa_3 \frac{X_{i,3} g g K^0_{3,l} X_{l,k} I_k^0}{1 - \varkappa_3 g K_{3,l}^0 X_{l,3} g}. \tag{40}$$

Считая теперь, что уравнение (39) с урезанным ядром можно решать итерациями, найдем явное выражение для $I_{i,k}$. Ограничиваясь первым приближением в числителе (40) и нулевым — в знаменателе (куда X входит под знаком суммы), получаем для последнего (коллективного) члена вблизи полюса

$$I^c_{i,k} = \varkappa_3 \frac{I_i^0(1, 3) K^0_{i,3}(3) g(3) \cdot g(4) K_{3,k}(4) I_k^0(4, 2)}{1 - \varkappa_3 g K_{3,3}^0 g}. \tag{41}$$

Сравнивая это выражение с (33) и (26), легко установить соответствующие изменения в вершине Γ^0. В выражении (36) следует произвести теперь замену

$$\sigma^3 g_{11'} \to \sigma^i \sum_{22'} I_i^0(11'; 2'2) K^0_{i,3}(22') g_{22'}. \tag{42}$$

Явное выражение для правой части (42) легко получить из (16). Отметим, что новые матричные компоненты ($i \neq 3$) оказываются малыми (в согласии с оценками (30)), так как $K_{0,3} \approx K_{1,3} \sim \omega$, а $K_{2,3} \sim \xi^{(+)}$.

Из рассмотренного метода можно установить также способ выбора $\varkappa$ и g для наилучшей аппроксимации I^0. Для этого можно потребовать минимум разности

$$(g K^0_{3,l} I_l^0 K^0_{l,3} g) - \varkappa_3 (g K^0_{3,3} g)^2,$$

являющейся поправкой к знаменателю в (41). Хорошие результаты дает использование в качестве $g(1)$ приведенного матричного элемента одночастичного квадрупольного момента (квадруполь-квадрупольные силы).

8. В случае хорошей адиабатичности ($\omega_0 \ll E$) коллективное возбуждение является стабильным образованием и его можно рассматривать

как некоторую «элементарную частицу» — фонон. При малых энергиях ($< E$) существенная часть взаимодействия нуклонов осуществляется посредством обмена фононами. Если пренебречь другими видами взаимодействия, то можно написать модельный нуклон-фононный гамильтониан, который будет приводить к графикам типа (29):

$$H = H_N + H_{ph} + H_{int}, \tag{43}$$

где H_N описывает нуклоны (с учетом их куперовского спаривания), H_{ph} соответствует свободным фононам:

$$H_{ph} = \sum_{\mu} \omega_0 \mathfrak{A}_\mu^+ \mathfrak{A}_\mu,$$

а нуклон-фононное взаимодействие имеет вид

$$H_{int} = \sum_{11'\mu} \Psi^+(1)\, \hat{\Gamma}_\mu^0(1, 1')\, \Psi(1')\, [\mathfrak{A}_\mu + (-1)^\mu \mathfrak{A}_{-\mu}^+], \tag{44}$$

где $\hat{\Gamma}_\mu^0$ определяется (36) и в рассматриваемом случае не зависит от энергетических переменных ($\varphi = \text{const}$).

При практических вычислениях с гамильтонианом (43) следует иметь в виду следующее:

А. Понятие фононной линии (29) имеет смысл лишь при малых передаваемых энергиях ($\omega \sim \omega_0 \ll E$). При больших ω формфактор нельзя считать постоянным и при $\omega \gtrsim E$ понятие фонона теряет смысл, так как эта ветвь сливается с одночастичными возбуждениями.

Б. Фонон получен нами из связанных пар нуклонов. Но в гамильтониане (43) история возникновения фонона не отражена. Если вычислять с (43) собственно-энергетическую часть фонона, то во втором приближении по H_{int} мы формально получим нуклонные петли, которые уже были ранее включены в фонон. Такие петли повторно учитываться не должны.

В. Для упрощения задачи может оказаться полезным переход от исходных нуклонов к квазичастицам путем преобразования Боголюбова, которому в представлении (2) соответствует унитарная матрица

$$\hat{U}(v) = u_v + i v_v \sigma^1 \qquad (u^2 - v^2 = \varepsilon / E,\ \ 2uv = \Delta / E). \tag{45}$$

При этом нуклонный гамильтониан H_N в (43) становится диагональным, а вершинная часть $\hat{\Gamma}$ меняет свою матричную структуру. Вместо σ^3 в (36) следует подставить

$$\sigma^3 \to \hat{U}(1)\, \sigma^3\, \hat{U}^+(1') = \xi_{11'}^{(+)}\, \sigma^3 + \eta_{11'}^{(+)}\, \sigma^2. \tag{46}$$

(Отметим, что функция Грина квазичастицы имеет вид (10) с $\hat{E} = E\sigma^3$.)

Г. В фононной ветви учитывается лишь один тип межнуклонного взаимодействия (T — четные квадрупольные силы между частицей и дыркой с $J = 2$). При необходимости учета других взаимодействий (что существенно, например, при вычислении магнитных моментов) они должны быть включены в гамильтониан (43) в виде прямого 4-фермионного взаимодействия.

Д. До сих пор мы формально рассматривали только один сорт нуклонов, однако все полученные выражения справедливы для системы из нейтронов и протонов, если считать, что индекс одночастичного состояния включает и характеристику нуклона. При этом необходимо учитывать различие спаривания (Δ_v) в нейтронной и протонной системах. Параметр квадрупольного взаимодействия $\varkappa_3$, по-видимому, одинаков для любой комбинации взаимодействующих нуклонов. Обобщение на случай различных $\varkappa_3$ для трех возможных пар нуклонов очевидно.

Замена исходного нуклонного гамильтониана модельным гамильтонианом (43) в значительной степени упрощает вопрос об учете многонуклон-

ных корреляций в ядре. Примером может служить задача об определении спектра нечетных ядер, которая рассматривается в работе Зелевинского и автора [6].

Литература

[1] S. Belyaev. Math. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **31**, *11*, 1959.
[2] L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **32**, *9*, 1960; Rev. Mod. Phys., **35**, 854, 1963.
[3] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, **39**, 1387, 1960.
[4] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, **40**, 684, 1961.
[5] S. T. Belyaev. Intern. Atomic. Energy Agency, Vienna, 1963, стр. 291.
[6] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. Ядерная физика, этот выпуск, стр. 13.

A NUCLEON-PHONON HAMILTONIAN FOR SPHERICAL NUCLEI

S. T. BELYAEV

A model Hamiltonian, containing nucleons and collective excitations-phonons, has been obtained for a spherical nucleus model with simple residual interaction between the nucleons (Cooper pairing + quadrupole interaction), using the method of Green functions. The distortion of the phonon propagator and the nucleon-phonon vertex part, when other types of interactions are switched on, is investigated. The use of the nucleon-phonon Hamiltonian significantly simplifies the investigation of many-particle correlations in spherical nuclei.
