*Журнал экспериментальной и теоретической физики*

*Т. 34* *1958* *Вып. 2*

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ К СИСТЕМЕ БОЗЕ-ЧАСТИЦ

*С. Т. Беляев*

Показана возможность применения техники квантовой теории поля к системе многих бозе-частиц. Сформулировано уравнение Дайсона для одночастичной функции Грина. Рассмотрены некоторые свойства конденсата в системе взаимодействующих бозе-частиц.

## 1. Введение

В последние годы в квантовой теории полей, в частности в квантовой электродинамике, широко используются функции Грина [1], введение которых позволило развивать методы, не связанные с обычной теорией возмущений (например, [2]). Показана также возможность применения методики функций Грина для решения задач многих тел [1]. Одночастичная функция Грина позволяет находить в таких задачах существенные характеристики системы: энергетический спектр, распределение частиц по импульсам в основном состоянии и др. [3].

В настоящей работе развивается методика функции Грина для системы, состоящей из большого числа $N$ взаимодействующих бозе-частиц. Особенностью данного случая является наличие в основном состоянии большой группы частиц с импульсом $\mathbf{p} = 0$ (конденсат), что не позволяет применить обычную технику квантовой теории поля. Однако при большом $N$ оказывается возможным использовать обычную технику фейнмановских графиков для частиц с $\mathbf{p} \neq 0$, а конденсат (как показано, он не исчезает при включении взаимодействия) рассматривать как некоторое внешнее поле.

Функция Грина выражается через три эффективных потенциала $\Sigma_{ik}$ (испускания и поглощения пары и рассеяния) и химический потенциал системы $\mu$ (аналог уравнения Дайсона в электродинамике [4,1]). Для нахождения $\Sigma_{ik}$ и $\mu$ требуется определенное приближение. Вычисление их по теории возмущений дает для спектра квазичастиц результат, полученный Боголюбовым [5]. В следующей статье [6] $\Sigma_{ik}$ и $\mu$ вычисляются в приближении малой плотности.

## 2. Постановка задачи. Фейнмановские графики

Рассматривается система $N$ бесспиновых бозе-частиц с массой $m = 1$, заключенных в объем $V$. Предполагается что $N$, $V \to \infty$, но $N/V = n$ конечно. При этом суммирование по дискретным импульсам заменяется интегрированием:

$$\sum_{\mathbf{p}} \to (2\pi)^{-3} V \int d\mathbf{p}.$$

Гамильтониан системы имеет вид $H = H_0 + H_1$, где ($\hbar = 1$)

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \nabla \Psi^+(\mathbf{x}) \nabla \Psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon^0_{\mathbf{p}} a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}; \quad \varepsilon^0_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2}, \tag{2.1}$$

[1] Частное сообщение А. Б. Мигдала.

$$H_1 = \frac{1}{2}\int \Psi^+(\mathbf{x})\,\Psi^+(\mathbf{x}')\,U(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\Psi(\mathbf{x}')\,\Psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{x}' =$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'}^+ a_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}\,. \qquad (2.2)$$

Здесь $U(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ — потенциал парного взаимодействия частиц, $U_{\mathbf{q}} = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} U(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ — его компонента Фурье, а

$$\Psi = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}, \quad \Psi^+ = V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^+,$$

где $a_{\mathbf{p}}$ и $a_{\mathbf{p}}^+$ — обычные бозе-операторы с правилом коммутации $[a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$.

Одночастичная функция Грина определяется двумя эквивалентными выражениями [1], либо через операторы в представлении Гайзенберга:

$$iG(x-x') = \langle \Phi_0^N,\ T\{\Psi(x)\,\Psi^+(x')\}\,\Phi_0^N\rangle, \qquad (2.3)$$

где среднее берется по основному состоянию $N$ взаимодействующих частиц, либо через операторы в представлении взаимодействия:

$$iG(x-x') = \langle T\{\Psi(x)\,\Psi^+(x')\,S\}\rangle / \langle S\rangle, \qquad (2.4)$$

Здесь усреднение проводится по основному состоянию невзаимодействующих частиц (все частицы в конденсате, т. е. числа заполнения $N_{p\neq 0} = 0$; $N_0 = N$). $S$ — матрица в нашем случае имеет вид

$$S = T\left\{\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 U(1-2)\,\Psi^+(1)\,\Psi^+(2)\,\Psi(2)\,\Psi(1)\right)\right\}, \qquad (2.5)$$

где для удобства введено обозначение $U(1-2) = U(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\,\delta(t_1-t_2)$. (Здесь и в дальнейшем $1 \equiv x, \ldots, p$ — 4-векторы, а $px = \mathbf{p}\mathbf{x} - p^0x^0$.) Определение (2.3) удобно для получения связи $G$ с физическими величинами, а (2.4) — для конкретных вычислений.

Если в числителе (2.4) разложить $S$-матрицу в ряд, то каждый член будет содержать $T$-произведение от некоторого числа $\Psi$ и $\Psi^+$. $T$-произведение известным образом [7] выражается через сумму нормальных произведений с различным числом сверток между $\Psi$ и $\Psi^+$. В квантовой электродинамике после усреднения по вакууму из этой суммы исчезают все члены, содержащие под знаком $N$-произведения несвернутые операторы уничтожения. Оставшимся членам, содержащим только свертки $\Psi$ и $\Psi^+$, сопоставляются определенные фейнмановские графики. В нашем случае усреднение проводится по состоянию, в котором присутствуют $N$ частиц с импульсом $\mathbf{p} = 0$, поэтому среднее от $N$-произведения, содержащего $a_0$, не обращается в нуль и обычный метод построения графиков оказывается неприменимым.

В связи с особой ролью состояний с $\mathbf{p} = 0$, удобно выделить операторы $a_0$ и $a_0^+$ из $\Psi$ и $\Psi^+$ положив,

$$\Psi = \Psi' + a_0/\sqrt{V}; \quad \Psi^+ = \Psi'^+ + a_0^+/\sqrt{V}. \qquad (2.6)$$

Функцию Грина (2.4) также разобьем на две части: функцию надконденсатных частиц

$$iG'(x-x') = \langle T\{\Psi'(x)\,\Psi'^+(x')\,S\}\rangle / \langle S\rangle \qquad (2.7)$$

и функцию Грина частиц конденсата (зависящую только от $t-t'$)

$$iG_0(t-t') = \langle T\{a_0(t)\,a_0^+(t')\,S\}\rangle / V\langle S\rangle. \qquad (2.8)$$

Обе функции не определяются независимо, так как $S$-матрица, входящая в обе функции, содержит как операторы $\Psi'$, так и $a_0$. Как будет показано ниже, в случае большого $N$ для определения $G'$ можно сформулировать обычный метод фейнмановских графиков, причем конденсат играет при этом роль внешнего поля.

Представим операции $T$ и $\langle \ldots \rangle$ в виде двух последовательных операций только над $\Psi'$ и $\Psi'^{+}$ и только над $a_0$ и $a_0^+$:

$$T = T^0 T', \quad \langle \ldots \rangle = \langle\langle \ldots \rangle' \rangle^0,$$

где $T^0$ и $\langle \ldots \rangle^0$ действуют на $a_0$ и $a_0^+$. Тогда (2.7) можно записать в следующем виде (штрих у $G'$ в дальнейшем опускаем):

$$iG(x - x') = \langle T^0 \{\mathfrak{G}(x - x')\} \rangle^0 / \langle S \rangle, \tag{2.9}$$

где

$$\mathfrak{G}(x - x') = \langle T' \{\Psi'(x) \Psi'^{+}(x') S\} \rangle'. \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) имеет ту же структуру, что и числитель в (2.7), но входящие в $S$ операторы $a_0$, $a_0^+$ играют здесь роль параметров. Усреднение в (2.10) по основному состоянию для операторов $\Psi'$, $\Psi'^{+}$ эквивалентно усреднению по вакууму, так что при вычислении $\mathfrak{G}$ можно использовать обычный формализм фейнмановских графиков.

Сопоставим потенциалу $-iU(1-2)$ пунктирную линию между 1 и 2, а свертке операторов $\Psi'(1)\Psi'^{+}(2) = iG^{(0)}(1-2)$ — сплошную линию с направлением от 2 к 1. Из вида гамильтониана взаимодействия (2.2) видно, что любой график, входящий в (2.10), получается комбинацией восьми элементарных графиков, изображенных на рис. 1. Они соответствуют различным членам в (2.2), получающимся после подстановки (2.6). Отсутствующей сплошной линии («неполной вершине») соответствует $a_0/\sqrt{V}$ или $a_0^+/\sqrt{V}$. На рис. 2 изображен для примера один из графиков, входящих в $\mathfrak{G}(x_1 - x_2)$, соответствующий интегралу

$$\mathfrak{M}_2(x_1;\ x_2) = i^2 \int G^{(0)}(1-3)\, U(3-4)\, G^{(0)}(3-5)\, G^{(0)}(4-6)\, U(5-6) \times$$

$$\times G^{(0)}(6-2)\, V^{-1} a_0^+(t_4)\, a_0(t_5)\, d^4x_3 d^4x_4 d^4x_5 d^4x_6. \tag{2.11}$$

Пусть $\mathfrak{M}(x; x')$ — какой-либо входящий в (2.10) график, не содержащий несвязанных частей — вакуумных петель. Рассмотрим наряду с ним графики, отличающиеся от $\mathfrak{M}$ наличием дополнительных вакуумных петель. Вся совокупность таких графиков, как известно, дает $\mathfrak{M}$ с дополнительным множителем, который имеет смысл среднего по вакууму от $S$-матрицы, т. е. в данном случае (когда усредняется только $\Psi'$ и $\Psi'^{+}$) $\langle S \rangle'$. Таким образом, учет вакуумных петель преобразует $\mathfrak{M}$ в

$$\mathfrak{M}(x; x') \langle S \rangle'. \tag{2.12}$$

В квантовой электродинамике множитель $\langle S \rangle$ сокращается со знаменателем в (2.4), поэтому там можно не учитывать вакуумные петли, отбрасывая вместе с тем знаменатель в (2.4). В нашем случае, как будет видно ниже, множитель $\langle S \rangle'$ играет существенную роль.

Выражение (2.12) войдет в (2.9) в виде

$$\langle T^0 \{\mathfrak{M}(x; x') \langle S \rangle'\} \rangle^0 / \langle S \rangle, \tag{2.13}$$

где оператор $T^0$ действует на $a_0, a_0^+$, входящие в $\mathfrak{M}$ и $\langle S\rangle'$. Пусть $\mathfrak{M}$ содержит $m$ пар операторов $a_0, a_0^+$, т. е. имеет вид

$$\mathfrak{M}(x; x') = V^{-m}\int M(x; x'; t_1 \dots t_m; t_1' \dots t_m')\, a_0(t_1) \dots$$

$$\dots a_0(t_m)\, a_0^+(t_1') \dots a_0^+(t_m')\,(dt)\,(dt'),$$

тогда (2.13) можно представить в виде

$$\int MiG_0(t_1 \dots t_m; t_1' \dots t_m')\,(dt)\,(dt'), \tag{2.14}$$

где

$$iG_0(t_1 \dots t_m; t_1' \dots t_m') = \langle T\{a_0(t_1) \dots a_0^+(t_m')\, S\}\rangle / V^m \langle S\rangle \tag{2.15}$$

является $m$-частичной функцией Грина для конденсата (см. 2.8).

Таким образом, графики для функции Грина (2.9) совпадают с описанными выше графиками для $\mathfrak{G}$, но в интегралы вместо совокупности множителей $a_0 a_0^+/V$ входит соответствующая функция Грина для конденсата. Так, в интеграл (2.11) вместо $a_0^+(t_4)\, a_0(t_5)/V$ войдет $iG_0(t_5 - t_4)$. Несвязанные части графиков учитывать не следует, они уже учтены в $G_0$. Задача сводится, таким образом, к нахождению конденсатных функций Грина $G_0$.

### 3. Функции Грина для конденсата

Запишем $m$-частичную конденсатную функцию (2.15) в виде

$$iG_0(t_1 \dots t_m; t_1' \dots t_m') = \frac{1}{V^m \langle S\rangle}\langle T^0\{a_0(t_1) \dots a_0(t_m)\, a_0^+(t_1') \dots$$

$$\dots a_0^+(t_m')\langle S\rangle'\}\rangle^0. \tag{3.1}$$

Величина $\langle S\rangle'$ получена суммированием всевозможных вакуумных петель. Если обозначить через $\lambda$ сумму различных компактных (т. е. односвязных) вакуумных петель, то нетрудно видеть [8], что сумма всех членов с двумя петлями равна $\lambda^2/2!$, с тремя — $\lambda^3/3!$ и т. д. и, следовательно, $\langle S\rangle' = e^{\lambda}$. В нашем случае $\lambda$ является функционалом от $a_0 a_0^+$. Легко видеть, что $\lambda$ пропорциональна объему $V$ (считая $a_0 a_0^+/V$ конечной величиной). В этом легко убедиться для произвольной вакуумной петли, рассматривая сначала соответствующий график с двумя свободными концами (с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$), который пропорционален $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \approx (2\pi)^{-3} V \delta_{\mathbf{pp}'}$, а затем полагая $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = 0$. Обозначая $\lambda = V\sigma$, где $\sigma$ — конечный функционал от $a_0 a_0^+/V$, получим

$$\langle S\rangle' = e^{V\sigma}. \tag{3.2}$$

Некоммутативность $a_0$ и $a_0^+$ ($\sim 1$) мала по сравнению с их произведением ($\sim N$) и на первый взгляд кажется, что порядок операторов $a_0$, $a_0^+$ не существенен и поэтому знак $T$-произведения в (3.1) можно опустить. Следует, однако, иметь в виду, что знак $T^0$ связывает в (3.1) произведение $a_0 \dots a_0^+$ с величиной $e^{V\sigma}$, содержащей любые степени объема, которая может компенсировать малость коммутаторов $a_0$ и $a_0^+$. Только после «выпутывания» $a_0 \dots a_0^+$ из-под $T$-произведения можно пренебречь их некоммутативностью. Отметим также, что операторы $a_0, a_0^+$ коммутируют с $H_0$ (2.1) и поэтому в представлении взаимодействия не зависят от времени. Аргументы у $a_0(t)$ и $a_0^+(t')$ в (3.1) играют лишь роль упорядочи-

вающих символов для операции $T^0$. После проведения $T$-упорядочивания можно считать $a_0$ и $a_0^+$ не зависящими от времени.

«Выпутывание» $a_0 \ldots a_0^+$ из-под $T$-произведения производится с помощью следующей теоремы.

Для произвольных функционалов $B(a_0 a_0^+ / V)$ и $\sigma(a_0 a_0^+ / V)$ с точностью до членов $\sim 1/V$ (считая $a_0 a_0^+ / V$ конечными величинами) имеет место следующее правило «выпутывания»:

$$T^0\{B(a_0 a_0^+ / V)\, e^{V\sigma}\} = B(AA^+)\, T^0\{e^{V\sigma}\}. \tag{3.3}$$

Величины $A$ и $A^+$ определяются интегральными уравнениями

$$A(t) = C(AA^+) + \int dt'\, \theta(t-t')\, \delta\sigma(AA^+)/\delta A^+(t'), \tag{3.4}$$
$$A^+(t) = C^+(AA^+) + \int dt'\, \theta(t'-t)\, \delta\sigma(AA^+)/\delta A(t'),$$

где $\theta(t-t')$ — свертка операторов $a_0$ и $a_0^+$

$$\theta(t-t') = \dot{a}_0(t)\, \dot{a}_0^+(t') = \begin{cases} 1 & \text{при } t > t' \\ 0 & \text{при } t < t', \end{cases} \tag{3.5}$$

а не зависящие от времени функционалы $C$ и $C^+$ определяются из квадратных уравнений

$$C^2 + C\int \frac{\delta\sigma(AA^+)}{\delta A^+(t)}\, dt = \frac{a_0^2}{V}; \quad C^{+2} + C^+ \int \frac{\delta\sigma(AA^+)}{\delta A(t)}\, dt = \frac{a_0^{+2}}{V}. \tag{3.6}$$

Доказательство сформулированной теоремы дано в Приложении.

Применяя (3.3) к (3.1), получим

$$iG_0(t_1 \ldots; \ldots t_m) = \langle A(t_1) \ldots A^+(t'_m)\rangle^0.$$

(Знаменатель в (3.1) сократился с $\langle T^0 \langle S\rangle'\rangle^0 = \langle S\rangle$.) Усреднение произведения $A \ldots A^+$ в пренебрежении величинами $\sim 1/V$ сводится к замене всех операторов $a_0$, $a_0^+$ на $\sqrt{N}$. Обозначая величины, получающиеся при такой замене из $A$ и $A^+$, соответственно через $K$ и $K^+$, получим

$$iG_0(t_1 \ldots t_m;\, t'_1 \ldots t'_m) = K(t_1) \ldots K(t_m)\, K^+(t'_1) \ldots K(t'_m), \tag{3.7}$$

где $K$ и $K^+$ согласно (3.4) удовлетворяют уравнениям

$$K(t) = \bar{C} + \int dt' \theta(t-t')\, \frac{\delta\sigma(KK^+)}{\delta K^+(t')}, \tag{3.8}$$
$$K^+(t) = \bar{C}^+ + \int dt' \theta(t'-t)\, \frac{\delta\sigma(KK^+)}{\delta K(t')},$$

а $\bar{C}$ и $\bar{C}^+$ определяются из

$$\bar{C}^2 + \bar{C}\int \frac{\delta\sigma(KK^+)}{\delta K^+(t)}\, dt = \frac{N}{V}; \quad \bar{C}^{+2} + \bar{C}^+ \int \frac{\delta\sigma(KK^+)}{\delta K(t)}\, dt = \frac{N}{V}. \tag{3.9}$$

Как видно из (3.7), функции Грина для конденсата распадаются на отдельные множители, каждый из которых зависит только от одного временного аргумента. Физический смысл этого результата можно пояснить следующими качественными соображениями. Для простоты мы будем иметь в виду двучастичную функцию для невзаимодействующих частиц $iG_0^{(0)}(t-t') = \langle a_0(t) a_0^+(t')\rangle / V$. Она описывает процесс перехода частицы из $t'$ в $t$. Если

вначале был вакуум, то такой процесс может произойти только путем рождения частицы в момент $t'$, а затем ее поглощения в более поздний момент $t$, что описывается сверткой операторов $a_0 a_0^+ = 0$. Следовательно, в этом случае $G^{(0)}$ совпадает со сверткой (что и имеет место в электродинамике). Если же процесс происходит в присутствии $N$ частиц того же типа, то можно родить и поглотить разные частицы. В этом случае процесс перехода частицы из $t'$ в $t$ состоит из двух процессов: рождения лишней частицы в конденсате в момент $t'$ и поглощения одной частицы из конденсата в момент $t$. Последовательность этих двух процессов при большом $N$ становится безразличной (с точностью до $N^{-1}$) и, следовательно, сами процессы — независимыми. Эти рассуждения справедливы и для точной функции $G_0$: она также разбивается на два множителя $K(t)$ и $K^+(t')$, описывающие два независимых процесса испускания и поглощения частицы в соответствующие моменты времени.

Рассмотрим более детально одночастичную конденсатную функцию

$$iG_0(t-t') = K(t)\,K^+(t'). \tag{3.10}$$

Здесь слева — функция только разности $t-t'$, а справа — произведение функций от $t$ и $t'$; следовательно, $K(t)$ и $K^+(t)$ имеют вид экспоненты

$$K(t) = \sqrt{n_0}\,e^{-i\mu t}; \qquad K^+(t) = \sqrt{n_0}\,e^{i\mu t} \tag{3.11}$$

и поэтому

$$iG_0(t-t') = n_0 e^{-i\mu(t-t')}. \tag{3.12}$$

Чтобы выяснить физический смысл величин $n_0$ и $\mu$, рассмотрим для $G_0$ определение (2.3)

$$iG_0(t-t') = \langle \Phi_0^N,\ T\{\mathbf{a}_0(t)\,\mathbf{a}_0^+(t')\}\,\Phi_0^N\rangle / V. \tag{3.13}$$

Полагая в (3.13) $t' = t$, найдем

$$iG_0(0) = \langle \Phi_0^N,\ a_0^+ a_0 \Phi_0^N\rangle / V = \bar{N}_0 / V. \tag{3.14}$$

Из сравнения (3.12) и (3.14) следует, что $n_0 = \bar{N}_0/V$ есть средняя плотность частиц конденсата.

Пусть теперь для определенности $t > t'$, тогда (3.13) можно записать в виде

$$iG_0(t-t') = \frac{1}{V}\langle \Phi_0^N \mathbf{a}_0(t)\,\Phi_0^{N+1}\rangle \langle \Phi_0^{N+1}\mathbf{a}_0^+(t')\,\Phi_0^N\rangle +$$
$$+ \frac{1}{V}\sum_{s\neq 0}\langle \Phi_0^N \mathbf{a}_0(t)\,\Phi_s^{N+1}\rangle \langle \Phi_s^{N+1}\mathbf{a}_0^+(t')\,\Phi_0^N\rangle,$$

или, выделяя временную зависимость у гайзенберговских операторов,

$$iG_0(t-t') = \frac{1}{V}\exp\{-i\,(E_0^{N+1} - E_0^N)(t-t')\}\,\langle \Phi_0^N a_0 \Phi_0^{N+1}\rangle \langle \Phi_0^{N+1} a_0^+ \Phi_0^N\rangle +$$
$$+ \frac{1}{V}\sum_{s\neq 0}\exp\{-i\,(E_s^{N+1} - E_0^N)(t-t')\}\,\langle \Phi_0^N a_0 \Phi_s^{N+1}\rangle \langle \Phi_s^{N+1} a_0^+ \Phi_0^N\rangle. \tag{3.15}$$

Сравнивая точное выражение (3.15) с (3.12), полученным в пренебрежении членами, исчезающими при $N\to\infty$, можно сделать заключение, что последний член в (3.15) исчезает при $N\to\infty$. При сравнении временной зависимости первого члена в (3.15) с (3.12) непосредственно видно, что величина $\mu$ имеет смысл химического потенциала системы

$$\mu = E_0^{N+1} - E_0^N \approx \partial E_0^N / \partial N. \tag{3.16}$$

Оба параметра $n_0$ и $\mu$, входящие к $K$ и $K^+$, могут быть в принципе определены из решения уравнений (3.8). Однако практически это сделать трудно. Дело в том, что при вычислении вакуумных петель, входящих в $\sigma$, приходится сначала интегрировать по времени в конечных пределах $(-T;\ T)$, так что в уравнения (3.8) входит параметр $T$. Переходить к пределу $T \to \infty$ можно только в решениях, но не в уравнениях, поэтому подставлять в $\sigma(KK^+)$ для $K$ и $K^+$ их предельные выражения (3.11) нельзя, а необходимо непосредственно решать нелинейные уравнения (3.8). Можно все же получить из (3.8) одно соотношение между $n_0$ и $\mu$.

Дифференцируя (3.8) по $t$ и замечая, что $d\theta(t-t')/dt = \delta(t-t')$, мы получим дифференциальные уравнения:

$$dK/dt = \delta\sigma(KK^+)/\delta K^+(t); \qquad dK^+/dt = -\delta\sigma(KK^+)/\delta K(t). \tag{3.17}$$

Представим величину $\sigma$ в виде ряда

$$\sigma(KK^+) = -i\sum_{(W)}\frac{1}{m}\int W_m(t'_1\ldots t'_m;\ t_1\ldots t_m)\,K^+(t'_1)\ldots$$

$$\ldots K^+(t'_m)\,K(t_1)\ldots K(t_m)\,(dt)\,(dt'), \tag{3.18}$$

где каждый член соответствует некоторой вакуумной петле с $m$ парами неполных вершин, а суммирование ведется по различным петлям. «Вакуумные амплитуды» $W_m$ фактически содержат только $2m-1$ аргументов (разности времен), поэтому предельные значения для $K$ и $K^+$ при бесконечных пределах интегрирования дают в (3.18) бесконечность. При вариации (3.18) по $K^+$ исчезает одно интегрирование и результат оказывается конечным. Используя (3.11) и записывая фурье-компоненту $W_m(t';\ t)$ в виде

$$W_m(\omega'_1\ldots;\ldots\omega_m)\,\delta\Big(\sum\omega-\sum\omega'\Big) = \int W_m(t';\ t)\,e^{i(\omega' t')-i(\omega t)}\,(dt)\,(dt'),$$

найдем

$$\frac{\delta\sigma(KK^+)}{\delta K^+(t)} = -i\sqrt{n_0}\sum_{(W)} n_0^{m-1}W_m(\mu\ldots;\ \ldots\mu)\,e^{-i\mu t}. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.17) и используя (3.11), получаем искомое соотношение

$$\mu = \sum_{(W)} n_0^{m-1}W_m(\mu\ldots\mu;\ \mu\ldots\mu). \tag{3.20}$$

Суммирование здесь ведется по различным вакуумным петлям, входящим в величину $\delta\sigma/\delta K^+(t)$ с весом единица (см. 3.19). Следует иметь в виду, что петли, входящие в $\delta\sigma/\delta K^+(t)$, имеют одну выделенную неполную вершину $t$ (объект варьирования), поэтому они считаются различными не только по геометрической структуре, но и по месту выделенной вершины.

(3.20) можно рассматривать как уравнение для $\mu(n_0)$. В рассматриваемую задачу входит один свободный параметр — полное число частиц $N$ (или плотность $n$), поэтому $\mu$ и $n_0$ должны быть выражены через $n$. Но $n$ непосредственно в уравнения не входит, поэтому можно считать свободным параметром не $n$, а $n_0$ и все остальные величины выражать через $n_0$. Связь же $n_0$ с $n$ может быть найдена после решения задачи. При таком условии (3.20) полностью определяет $K$ и $K^+$ и, следовательно, любую конденсатную функцию Грина. Заметим, что можно решать задачу и с двумя свободными параметрами $\mu$ и $n_0$ и лишь в конечном результате учесть их связь (см. 6), но в этом случае значительно увеличиваются математические трудности.

## 4. Некоторые свойства конденсата

Из вида конденсатных функций $G_0$ можно сделать определенные заключения о характере конденсата в системе взаимодействующих частиц.

При отсутствии взаимодействия распределение частиц по импульсам в основном состоянии имеет вид $\delta(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} V \delta_{\mathbf{p}0}$. При включении взаимодействия распределение размывается. При этом в принципе возможны два случая: либо член с $\delta(\mathbf{p})$ полностью исчезает и распределение становится непрерывным (нет конденсата), либо член с $\delta(\mathbf{p})$ остается, так что состояние с $\mathbf{p} = 0$ по-прежнему выделено (есть конденсат). В первом случае все средние числа заполнения $\bar{N}_{\mathbf{p}}$ конечны, и $\bar{N}_{\mathbf{p}} \to \bar{N}_0$ при $\mathbf{p} \to 0$. Во втором случае $\bar{N}_{\mathbf{p}\neq 0}$ конечны, но $\bar{N}_0 \sim V$.

Возможность пренебрежения в (3.15) последним членом эквивалентно утверждению, что действие $a_0$ на основное состояние системы $\Phi_0^N$ не возбуждает систему, т. е.

$$a_0 \Phi_0^N \approx (N_0)^{1/2} \Phi_0^{N-1}. \tag{4.1}$$

Это утверждение на первый взгляд кажется странным: изменение числа частиц с $\mathbf{p} = 0$, нарушая стационарное соотношение между числами заполнения должно возбуждать систему. Если $N_0$ конечно, то изменение его на единицу действительно существенно меняет состояние, но если $N_0 \sim V$, то такое изменение практически не возмутит основное состояние. Соотношение (4.1) говорит в пользу второго случая. Следовательно, при включении взаимодействия конденсат никогда полностью не исчезает.

Рассмотрим теперь вопрос о флуктуации числа частиц в конденсате. В состоянии $\Phi_0^N$ величина $N_0$ не имеет определенного значения. Разложим $\Phi_0^N$ по собственным функциям состояний с определенным $N_0$. Это разложение можно представить в виде

$$\Phi_0^N = \sum_{m=0}^{N} C_{N-m}^N \varphi_0^{N-m} \chi_m^N, \tag{4.2}$$

где $\varphi_0^{N_0}$ — функции только от чисел заполнения конденсата, а $\chi_m^N$ зависят от остальных переменных. $\chi_m^N$ описывает состояние $m$ частиц, размазанных по всем импульсам $\mathbf{p} \neq 0$. Другими словами, она является суперпозицией функций от чисел заполнения с $\mathbf{p} \neq 0$. От верхнего индекса $N$ зависят коэффициенты в этой суперпозиции. Нормировка для $\chi_m^N$ имеет вид $\langle \chi_m^N \chi_{m'}^N \rangle = \delta_{mm'}$.

Используем (4.1) для вычисления матричного элемента

$$\langle \Phi_0^{N-1} a_0 \Phi_0^N \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \sqrt{N-m} \left(C_{N-m-1}^{N-1}\right)^* C_{N-m}^N \langle \chi_m^{N-1} \chi_m^N \rangle \tag{4.3}$$

(учтена ортогональность $\varphi_0^{N_0}$ и $\varphi_0^{N_0'}$ при $N_0 \neq N_0'$). $C_{N-m}^N$ и $\chi_m^N$ — плавные функции $N$, поэтому можно написать

$$C_{N-m-1}^{N-1} \approx C_{N-m}^N - \partial C_{N-m}^N / \partial N = C_{N-m}^N \{1 + O(N^{-1})\};$$

$$\chi_m^{N-1} \approx \chi_m^N - \partial \chi_m^N / \partial N = \chi_m^N \{1 + O(N^{-1})\}.$$

В результате (4.3) принимает вид

$$\langle \Phi_0^{N-1} a_0 \Phi_0^N \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \sqrt{N-m} \, |C_{N-m}^N|^2 \{1 + O(N^{-1})\}.$$

Легко видеть, что стоящая здесь сумма есть $\overline{N_0^{1/2}}$, так что

$$\langle \Phi_0^{N-1} a_0 \Phi_0^N \rangle = \overline{N_0^{1/2}} \{1 + O(N^{-1})\}. \tag{4.4}$$

Аналогичное выражение получается, естественно, и для $\langle \Phi_0^{N+1} a_0^+ \Phi_0^N \rangle$.

Оценим сумму в (3.15), положив в ней $t = t'$. Используя (3.14) и (4.4), находим

$$\sum_{s \neq 0} \langle \Phi_0^N a_0 \Phi_s^{N+1} \rangle \langle \Phi_s^{N+1} a_0^+ \Phi_0^N \rangle \approx \overline{N}_0 - (\overline{N_0^{1/2}})^2, \tag{4.5}$$

откуда видно, что эта сумма связана с величиной флуктуации числа частиц в конденсате. Из того факта, что при $N \to \infty$ этой суммой можно пренебречь, следует

$$[\overline{N}_0 - (\overline{N_0^{1/2}})^2] / \overline{N}_0 \to \infty \text{ при } N \to \infty, \tag{4.6}$$

т. е. относительные флуктуации числа частиц в конденсате малы.

## 5. Функция Грина для частицы с $p \neq 0$

С учетом полученного в разделе 3 выражения для конденсатных функций можно следующим образом переформулировать правила построения графиков, изложенные в разделе 2.

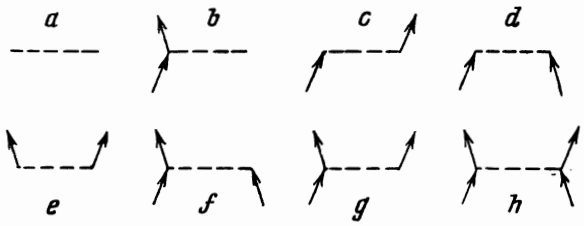



Рис. 1

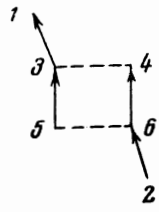



Рис. 2

Любой график получается комбинацией восьми элементарных графиков (рис. 1). Каждой неполной вершине сопоставляется множитель $K(t) = \sqrt{n_0} e^{-i\mu t}$ или $K^+(t) = \sqrt{n_0} e^{i\mu t}$ соответственно для отсутствующей входящей или выходящей сплошной линии. Наличие такого множителя означает, что в данном взаимодействии участвует (поглощается или испускается) частица конденсата с энергией $\mu$. Если каждой входящей и выходящей частице конденсата сопоставить некоторую линию (например волнистую), то все эти линии будут свободными. По аналогии с квантовой электродинамикой можно сказать, что конденсат играет роль внешнего поля с частотой $\mu$.




Рис. 3

Рассмотрим общую структуру графиков, дающих вклад в функцию Грина (2.7). Произвольный график, входящий в $G$, имеет вид ожерелья, состоящего из отдельных неприводимых частей, связанных между собой только одной сплошной линией. Всего возможны три типа неприводимых частей (т. е. не содержащих внутри себя элементов, соединенных только одной сплошной линией), отличающихся числом выходов и входов сплошных линий (рис. 3). Полные совокупности соответствующих неприводимых

частей назовем $-i\Sigma_{11}$, $-i\Sigma_{02}$, $-i\Sigma_{20}$. Процессам с сохранением числа частиц над конденсатом отвечает $\Sigma_{11}$, тогда как $\Sigma_{02}$ и $\Sigma_{20}$ соответствуют поглощению и рождению двух частиц. При этом, естественно, рождаются или поглощаются две частицы конденсата и их энергию $2\mu$ следует учитывать. В импульсном представлении это сказывается в том, что $\Sigma_{11}(p_1; p_2)$ содержит $\delta(p_1 - p_2)$, тогда как в $\Sigma_{02}(p_1 p_2)$ и $\Sigma_{20}(p_1 p_2)$ входит $\delta(p_1 + p_2 - 2\mu)$ [2]. В дальнейшем мы будем учитывать законы сохранения в аргументах $\Sigma_{ik}$, обозначая коэффициенты при $\delta$-функциях через

$$\Sigma_{11}(p;\ p) \equiv \Sigma_{11}(p);\ \Sigma_{02}(p + \mu, -p + \mu) \equiv \Sigma_{02}(p + \mu);$$
$$\Sigma_{20}(p + \mu, -p + \mu) \equiv \Sigma_{20}(p + \mu). \tag{5.1}$$

Величины $\Sigma_{ik}$ являются характеристиками взаимодействия частиц и их можно назвать эффективными потенциалами парного взаимодействия.

Введем наряду с функцией Грина $G$ вспомогательную величину $\hat{G}$ — совокупность графиков, имеющих два входящих конца (а не один входящий и один выходящий, как в $G$). На рис. 4 представлены некоторые структурные графики, входящие в $\hat{G}$. Величина $\hat{G}$ описывает процесс перехода двух частиц в конденсат. В импульсном представлении, когда входящим концам соответствуют 4-импульсы $p + \mu$ и $-p + \mu$ будем писать $\hat{G}(p + \mu)$.

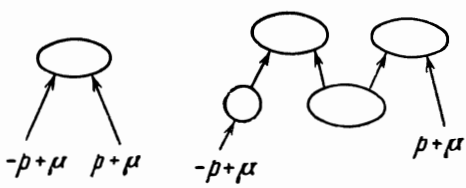



Рис. 4

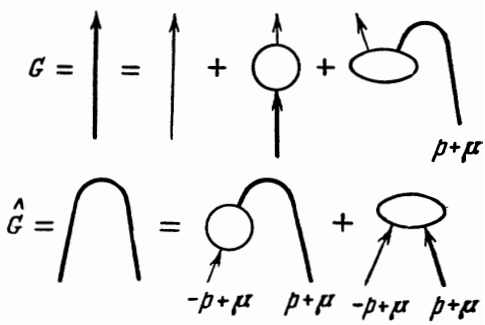



Рис. 5

Для $G$ и $\hat{G}$ можно написать систему двух уравнений (аналог уравнения Дайсона в электродинамике [5,1]):

$$G(p + \mu) = G^{(0)}(p + \mu) + G^{(0)}(p + \mu)\,\Sigma_{11}(p + \mu)\,G(p + \mu) +$$
$$+ G^{(0)}(p + \mu)\,\Sigma_{20}(p + \mu)\,\hat{G}(p + \mu), \tag{5.2}$$
$$\hat{G}(p+\mu) = G^{(0)}(-p+\mu)\Sigma_{11}(-p+\mu)\hat{G}(p + \mu) + G^{(0)}(-p + \mu)\Sigma_{02}(p+\mu)G(p+\mu).$$

Структура этих уравнений изображена графически на рис. 5 и не требует дальнейших пояснений. Разрешая систему (5.2) относительно $G$ и $\hat{G}$, найдем

$$G(p + \mu) = (G^{(0)^{-1}} - \Sigma_{11})^{-}\{(G^{(0)^{-1}} - \Sigma_{11})^{+}(G^{(0)^{-1}} - \Sigma_{11})^{-} - \Sigma_{20}\Sigma_{02}\}^{-1},$$
$$\hat{G}(p + \mu) = \Sigma_{02}\{(G^{(0)^{-1}} - \Sigma_{11})^{+}(G^{(0)^{-1}} - \Sigma_{11})^{-} - \Sigma_{20}\Sigma_{02}\}^{-1}, \tag{5.3}$$

где значки $\pm$ означают аргументы $(\pm p + \mu)$.

Заметим, что выражение (5.3) для $G$ можно записать в обычной форме уравнения Дайсона

$$G^{-1} = G^{(0)^{-1}} - \Sigma,$$
$$\Sigma(p + \mu) = \Sigma_{11}(p + \mu) + \Sigma_{20}\Sigma_{02} / [G^{(0)^{-1}}(-p + \mu) - \Sigma_{11}(-p + \mu)]. \tag{5.4}$$

[2] $\mu$ здесь означает 4-вектор, имеющий только одну четвертую компоненту.

Подставляя в (5.3) явное выражение для функции Грина свободных частиц

$$G^{(0)-1}(p) = p^0 - \varepsilon_p^0 + i\delta; \qquad (\varepsilon_p^0 = p^2/2; \quad \delta \to +0), \tag{5.5}$$

получим для $G$ и $\hat{G}$

$$G(p+\mu) = \frac{p^0 + \varepsilon_p^0 + \Sigma_{11}^- - \mu}{[p^0 - (\Sigma_{11}^+ - \Sigma_{11}^-)/2]^2 - [\varepsilon_p^0 + (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^-)/2 - \mu]^2 + \Sigma_{20}\Sigma_{02}}, \tag{5.6}$$

$$\hat{G}(p+\mu) = \frac{-\Sigma_{02}}{[p^0 - (\Sigma_{11}^+ - \Sigma_{11}^-)/2]^2 - [\varepsilon_p^0 + (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^-)/2 - \mu]^2 + \Sigma_{20}\Sigma_{02}}. \tag{5.7}$$

Выражение (5.6) определяет функцию Грина через эффективные потенциалы $\Sigma_{ik}$ и химический потенциал системы $\mu$. Какие-либо уравнения для самих $\Sigma_{ik}$ и $\mu$ не могут быть получены в общем виде. Для их определения необходимо применять приближенные методы суммирования графиков. В разделе 7 для вычисления $\Sigma_{ik}$ и $\mu$ используется теория возмущений. В следующей статье [6] будет рассмотрено приближение, в котором малым параметром является плотность.

## 6. Связь функции Грина с параметрами системы

Энергия основного состояния $E_0$ может быть найдена усреднением гамильтониана (2.1), (2.2) по $\Phi_0^N$

$$E_0 = \langle \Phi_0^N H \Phi_0^N \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_p^0 \langle a_p^+ a_p \rangle + \frac{1}{2V} \sum_{pp'q} U_q \langle a_p^+ a_{p'}^+ a_{p'-q} a_{p+q} \rangle. \tag{6.1}$$

Последний член в (6.1) можно связать с функцией Грина $G$. Рассмотрим $G$ в $(\mathbf{p}, t)$-представлении (т. е. импульсное представление только для пространственных переменных). Из (2.3) следует (усреднение везде по $\Phi_0^N$)

$$iG(\mathbf{p};\ t-t') = \langle T\{\mathbf{a}_p(t)\,\mathbf{a}_p^+(t')\}\rangle, \qquad (\mathbf{p} \neq 0), \tag{6.2}$$

откуда легко получить

$$(i\partial/\partial t - \varepsilon_p^0) G(\mathbf{p};\ t-t') = \delta(t-t') + R(\mathbf{p};\ t-t'), \tag{6.3}$$

где

$$R(\mathbf{p};\ t-t') = -\frac{i}{V} \sum_{p'q} U_q \langle T\{\mathbf{a}_{p'}^+(t)\,\mathbf{a}_{p'-q}(t)\,\mathbf{a}_{p+q}(t)\,\mathbf{a}_p^+(t')\}\rangle. \tag{6.4}$$

Умножая (6.3) на $e^{ip^0(t-t')}$ и интегрируя по $t$, получаем с учетом (5.5)

$$G^{(0)-1}(p)\,G(p) = 1 + R(p),$$

откуда согласно определению (5.4) для $\Sigma$ непосредственно следует

$$R(p) = \Sigma(p)\,G(p), \qquad (\mathbf{p} \neq 0). \tag{6.5}$$

С другой стороны, из (6.4) видно, что величина $R(\mathbf{p};\ -0)$ связана с последней суммой в (6.1); а именно

$$\frac{1}{2V} \sum_{pp'q} U_q \langle a_p^+ a_{p'}^+ a_{p'-q} a_{p+q} \rangle = \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{p}} R(\mathbf{p};\ -0). \tag{6.6}$$

Выражение (6.5) для $R$ справедливо только для $\mathbf{p} \neq 0$. При $\mathbf{p} \neq 0$ первая часть в (6.2) равна согласно (3.13) $iVG_0(t-t')$, так что вместо (6.3) в этом случае получаем

$$i\frac{\partial}{\partial t}G_0(t-t') = \frac{1}{V}\delta(t-t') + \frac{1}{V}R(0;\ t-t'). \tag{6.7}$$

Пренебрегая членом с $\delta$-функцией ($\sim V^{-1}$) и используя для $G_0$ (3.12), находим

$$R(0;\ -0) = i\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_0(\tau)\right]_{\tau=0} = -i\mu n_0. \tag{6.8}$$

С помощью (6.6) и (6.8) выражение для $E_0$ (6.1) записывается в виде

$$E_0 = \sum_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}}^0\langle a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}\rangle + \frac{i}{2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}R(\mathbf{p};\ -0) + \frac{1}{2}\mu n_0. \tag{6.9}$$

Используя соотношение (непосредственно следующее из (6.2))

$$\overline{N}_{\mathbf{p}} = \langle a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}\rangle = iG(\mathbf{p};\ -0) = i\int G(p)\,dp^0/2\pi \tag{6.10}$$

и переходя в (6.9) от суммирования к интегрированию, получим с учетом (6.5) следующее выражение для энергии основного состояния $E_0$ [3]:

$$E_0/V = i\int[\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + {}^1\!/_2\Sigma(p)]\,G(p)\,d^4p/(2\pi)^4 + \mu n_0/2 \tag{6.11}$$

(интегрирование по $p^0$ с замыканием в верхнюю полуплоскость).

Величины $\Sigma$ и $G$ содержат в качестве параметров $\mu$ и $n_0$ (если при вычислении не использовалось (3.20) для исключения одного из них), поэтому (6.11) можно рассматривать как связь между $E_0/V$, $\mu$ и $n_0$. Еще два соотношения между этими параметрами можно получить, если использовать, во-первых, определение химического потенциала $\mu$

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{E_0}{V}\right), \tag{6.12}$$

а во-вторых, условие сохранения числа частиц, которое с учетом (6.10) можно записать в следующем виде (для единицы объема)

$$n = n_0 + i\int G(p)\,d^4p/(2\pi)^4. \tag{6.13}$$

Выражения (6.11), (6.12) и (6.13) определяют $E_0/V$, $\mu$ и $n_0$ через плотность $n$ (или любые другие три величины через четвертую). Заметим, что полученное ранее соотношение (3.20) не является новым, при выполнении (6.11), (6.12) и (6.13) оно будет удовлетворяться тождественно.

## 7. Приближение теории возмущений для $\Sigma_{ik}$ и $\mu$

Графиками первого приближения теории возмущений для $\Sigma_{ik}$ являются элементарные графики рис. 1 ($b$, $c$ — для $\Sigma_{11}$, $d$ — для $\Sigma_{02}$, $e$ — для $\Sigma_{20}$), из рассмотрения которых непосредственно следует:

$$\Sigma_{02} = \Sigma_{20} = n_0 U_{\mathbf{p}}; \qquad \Sigma_{11}^+ = n_0(U_0 + U_{\mathbf{p}}). \tag{7.1}$$

[3] О существовании подобного соотношения для ферми-системы мне сообщил В. М. Галицкий.

Единственная «вакуумная петля» в первом приближении — элементарный график рис. 1, *а*, так что согласно (3.20) для $\mu$ получаем

$$\mu = n_0 U_0. \tag{7.2}$$

Подставляя (7.1) и (7.2) в выражение для функции Грина (5.6), находим

$$G(p+\mu) = p^0 + \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 U_{\mathbf{p}} / (p^{0\,2} - \varepsilon_{\mathbf{p}}^{0\,2} - 2n_0 U_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + i\delta). \tag{7.3}$$

Значение $p^0(\mathbf{p})$ в полюсе функции Грина $G(p+\mu)$ определяет энергию элементарных возбуждений в системе (квазичастиц) [3]. Из (7.3) находим для энергии квазичастиц

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{p}}^{0\,2} + 2n_0 U_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}^0}. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.3) в (6.10), найдем средние числа заполнения в основном состоянии

$$\overline{N}_{\mathbf{p}} = (-\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 U_{\mathbf{p}}) / 2\varepsilon_{\mathbf{p}} = (n_0 U_{\mathbf{p}})^2 / 2\varepsilon_{\mathbf{p}} (\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + n_0 U_{\mathbf{p}}). \tag{7.5}$$

Выражения (7.4) и (7.5) совпадают с результатами известной работы Боголюбова [5].

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

### Доказательство теоремы (3.3)

Преобразуем $T$-произведение в (3.3) согласно правилу Вика, записав последнее в виде [9]

$$T\{Be^{V\sigma}\} = N\{e^{\Delta} Be^{V\sigma}\}, \tag{П.1}$$

где $\Delta$ — оператор, заменяющий пару $a_0 a_0^+$ их сверткой (3.5):

$$\Delta = \frac{1}{V}\int dt dt' \theta(t-t') \frac{\delta^2}{\delta\alpha(t)\,\delta\alpha^+(t')}; \quad (\alpha = a_0/\sqrt{V}; \quad \alpha^+ = a_0^+/\sqrt{V}). \tag{П.2}$$

Доказательство теоремы разбивается на два этапа: 1) «выпутывание» $B$ из-под оператора $e^{\Delta}$ и 2) последующее «распутывание» $N$-произведения.

1) Результат первой операции формулируется следующим образом.

С точностью до членов $\sim V^{-1}$ имеет место равенство

$$e^{\Delta}\{B(\alpha;\ \alpha^+) e^{V\sigma}\} = B(\beta;\ \beta^+) e^{\Delta}\{e^{V\sigma}\}, \tag{П.3}$$

где $\beta$ и $\beta^+$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha + \int dt' \theta(t-t')\, \delta\sigma(\beta\beta^+) / \delta\beta^+(t'); \\ \beta^+(t) &= \alpha^+ + \int dt' \theta(t'-t)\, \delta\sigma(\beta\beta^+) / \delta\beta(t'). \end{aligned} \tag{П.4}$$

Доказательство. Множитель $V^{-1}$, содержащийся в $\Delta$, может компенсироваться в левой части (П.3) только в том случае, когда хотя бы одним варьированием затрагивается $e^{V\sigma}$. Запишем $\Delta = \Delta_{\sigma\sigma} + \Delta_{B\sigma} + \Delta_{\sigma B}$, где индексы показывают объект варьирования (первый индекс по $\alpha$). Результат действия оператора $e^{\Delta_{\sigma\sigma}}$ представим в виде

$$e^{\Delta_{\sigma\sigma}}\{e^{V\sigma}\} = e^{V\sigma'} \tag{П.5}$$

(как будет показано ниже, $\sigma'$ не содержит $V$). С учетом (П.5) получаем

$$e^{\Delta}\{Be^{V\sigma}\} = \exp(\Delta_{B\sigma} + \Delta_{\sigma B})\{Be^{V\sigma'}\}. \qquad (П.6)$$

Подействуем оператором $e^{\Delta_{B\sigma}}$ сначала на $e^{V\sigma'}$. Из (П.2) получаем

$$\Delta_{B\sigma}e^{V\sigma'} = e^{V\sigma'}\int dtdt'\theta(t-t')\frac{\delta\sigma'}{\delta\alpha^{+}(t')}\left[\frac{\delta}{\delta\alpha(t)}\right]_B \equiv e^{V\sigma'}D_B. \qquad (П.7)$$

При действии последующих операторов $\Delta_{B\sigma}$ конечное выражение будет давать только варьирование экспоненты, так что из последовательного применения (П.7) следует $(\Delta_{B\sigma})^k e^{V\sigma'} = e^{V\sigma'}(D_B)^k$, откуда

$$e^{\Delta_{B\sigma}}e^{V\sigma'} = e^{V\sigma'}e^{D_B}. \qquad (П.8)$$

Из (П.7) непосредственно видно, что $e^{D_B}$ является оператором «сдвига» $\alpha(t)$ на величину

$$\alpha_1(t) = \int dt'\theta(t-t')\delta\sigma'/\delta\alpha^{+}(t'),$$

поэтому

$$e^{\Delta_{B\sigma}}\{B(\alpha;\ \alpha^{+})e^{V\sigma'}\} = e^{V\sigma'}e^{D_B}B(\alpha;\ \alpha^{+}) = e^{V\sigma'}B(\alpha+\alpha_1;\ \alpha^{+}). \qquad (П.9)$$

Совершенно аналогичные соотношения получаются для оператора $e\Delta_{\sigma B}$, «сдвигающего» $\alpha^{+}(t)$. Окончательно получаем для (П.6)

$$e^{\Delta}\{B(\alpha;\ \alpha^{+})e^{V\sigma}\} = B(\beta;\ \beta^{+})e^{V\sigma'} = B(\beta;\ \beta^{+})e^{\Delta}\{e^{V\sigma}\}, \qquad (П.10)$$

где

$$\beta(t) = \alpha + \int dt'\theta(t-t')\delta\sigma'/\delta\alpha^{+}(t');\ \beta^{+}(t) = \alpha^{+} + \int dt'\theta(t'-t)\delta\sigma'/\delta\alpha(t');\ (П.11)$$

(П.10) совпадает с (П.3). Остается установить тождественность (П.11) и (П.4). Варьируя обе части (П.5) по $\alpha(t)$ и $\alpha^{+}(t)$, а затем, используя (П.10), получим

$$\delta\sigma'(\alpha\alpha^{+})/\delta\alpha(t) = \delta\sigma(\beta\beta^{+})/\delta\beta(t);\ \delta\sigma'(\alpha\alpha^{+})/\delta\alpha^{+}(t) = \delta\sigma(\beta\beta^{+})/\delta\beta^{+}(t); \qquad (П.12)$$

(П.12) совместно с (П.11) определяет $\sigma'$. Подставляя (П.12) в (П.11), получим (П.4).

2) На этом этапе можно считать $\alpha$ и $\alpha^{+}$ постоянными операторами (см. начало 3), а $\sigma'$ и $B'(\beta\beta^{+}) \equiv B'(\alpha\alpha^{+})$-функциями $\alpha$ и $\alpha^{+}$, а не функционалами. Связь функции $\sigma'(\alpha\alpha^{+})$ с $\sigma$ можно получить интегрированием (П.12) по времени:

$$\int\frac{\delta\sigma(\beta\beta^{+})}{\delta\beta(t)}dt = \int\frac{\delta\sigma'(\alpha\alpha^{+})}{\delta\alpha(t)}dt = \frac{\partial\sigma'}{\partial\alpha};\ \int\frac{\delta\sigma(\beta\beta^{+})}{\delta\beta^{+}(t)}dt = \frac{\partial\sigma'}{\partial\alpha^{+}}. \qquad (П.13)$$

Для дальнейшего существенно, что $\sigma'$ и $B'$ зависят только от $\nu = \alpha^{+}\alpha$. В этом случае справедливо следующее правило «выпутывания»:

$$N\{B'(\nu)e^{V\sigma'(\nu)}\} = B'(\bar{\nu})N\{e^{V\sigma'}\}, \qquad (П.14)$$

где $\bar{\nu}$ связано с $\nu$ соотношением:

$$\nu = \bar{\nu}[1 + \partial\sigma'(\bar{\nu})/\partial\bar{\nu}] \equiv \bar{\nu}X^2 \qquad (П.15)$$

Прежде чем переходить к доказательству (П.14), покажем, что из (П.3) и (П.14) следует справедливость теоремы (3.3). После отделения бесконечного множителя $e^{V\sigma'}$ некоммутативностью $\alpha$ и $\alpha^{+}$ можно пренеб-

речь. Это позволяет разбить подстановку $\nu \to \bar{\nu}$, которая производится в (П.14), на две подстановки $\alpha \to \bar{\alpha}$, $\alpha^+ \to \bar{\alpha}^+$, полагая вместо (П.15) $\alpha = \bar{\alpha} X$ и $\alpha^+ = \bar{\alpha}^+ X$ или после некоторых преобразований

$$\alpha^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}\partial\sigma'(\bar{\nu})/\partial\bar{\alpha}^+; \quad \alpha^{+2} = \bar{\alpha}^{+2} + \bar{\alpha}^+\partial\sigma'(\bar{\nu})/\partial\bar{\alpha}. \tag{П.16}$$

Величины, в которые переходят $\beta$ и $\beta^+$ при подстановке $\alpha$, $\alpha^+ \to \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^+$ назовем соответственно $A$ и $A^+$. Уравнения для $A$ и $A^+$ получим из (П.4) заменой свободных членов на $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}^+$:

$$\begin{aligned} A(t) &= \bar{\alpha} + \int dt'\theta(t-t')\,\delta\sigma(AA^+)/\delta A^+(t'); \\ A^+(t) &= \bar{\alpha}^+ + \int dt'\theta(t'-t)\,\delta\sigma(AA^+)/\delta A(t'), \end{aligned} \tag{П.17}$$

Из определения $B'(\nu)$ следует, что $B'(\bar{\nu}) = B(AA^+)$, так что (П.3) и (П.14) дают (3.3). Для полного доказательства теоремы остается установить тождественность (П.17) и (3.4). Для этого произведем подстановку $\alpha, \alpha^+ \to \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^+$ в (П.13), в результате чего получим

$$\frac{\partial\sigma'(\bar{\nu})}{\partial\bar{\alpha}} = \int \frac{\delta\sigma(AA^+)}{\delta A(t)}\,dt; \quad \frac{\partial\sigma'(\bar{\nu})}{\partial\bar{\alpha}^+} = \int \frac{\delta\sigma(AA^+)}{\delta A^+(t)}\,dt. \tag{П.18}$$

С учетом (П.18) уравнения для $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}^+$ (П.16) совпадают с (3.6), чем устанавливается тождественность $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^+$ с $C$, $C^+$, а тем самым и доказывается теорема.

Перейдем к доказательству (П.14). Введем величину $L$, связанную с $\sigma'$ соотношением

$$N\{e^{V\sigma'}\} = e^{VL}. \tag{П.19}$$

Ниже $L$ будет явно выражена через $\sigma'$, откуда будет видно, что она не содержит $V$. Пусть для $B'(\nu)$ имеем

$$B'(\nu) = \sum_k b_k \nu^k, \tag{П.20}$$

тогда с учетом (П.19) получим

$$N\{B'e^{V\sigma'}\} = \sum_k b_k \alpha^{+k} N\{e^{V\sigma'}\}\alpha^k = \sum_k b_k \alpha^{+k} e^{VL}\alpha^k. \tag{П.21}$$

Для произвольной функции $y(\nu)$ справедливо соотношение коммутации $\alpha y(\nu) = \left(y + \frac{1}{V}\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)\alpha$, последовательно применяя которое, получим

$$\alpha^k e^y = \exp\left\{\left(1 + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^k y\right\}\alpha^k. \tag{П.22}$$

Выбирая теперь $y$ из равенства $\left(1 + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^k y = VL$, получим из (П.22) правило «протаскивания» $\alpha^k$ через $e^{VL}$:

$$\exp\{VL\}\alpha^k = \alpha^k \exp\left\{\left(1 + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{-k} VL\right\} \approx \alpha^k \exp\left(-k\frac{\partial L}{\partial\nu}\right)\exp\{VL\}. \tag{П.23}$$

Применяя (П.23) к (П.21), найдем

$$N\{B'e^{V\sigma'}\} = \sum_k b_k (\nu e^{-\partial L/\partial\nu})^k e^{VL} = B'(\bar{\nu})\,e^{VL}, \tag{П.24}$$

где

$$\bar{\nu} = \nu e^{-\partial L/\partial \nu}. \qquad (\text{П.25})$$

Для определения $L$ дифференцируем по $\alpha$ обе части (П.19).

В левой части получим

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \alpha} N\{e^{V\sigma'}\} = N\left\{\frac{\partial \sigma'}{\partial \alpha} e^{V\sigma'}\right\} = \alpha^+ N\left\{\frac{\partial \sigma'}{\partial \nu} e^{V\sigma'}\right\}$$

или после использования (П.24) и (П.19)

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \alpha} N\{e^{V\sigma'}\} = \alpha^+ \frac{\partial \sigma'(\bar{\nu})}{\partial \bar{\nu}} e^{VL}. \qquad (\text{П.26})$$

При дифференцировании по $\alpha$ правой части (П.19) следует иметь в виду, что $\partial L/\partial \alpha$ не коммутирует с $L$. Замечая, что $\partial L/\partial \alpha = \alpha^+ \partial L/\partial \nu$ и используя соотношение коммутации $L\alpha^+ = \alpha^+\left(L + \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \nu}\right)$, нетрудно получить формулу

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \alpha} L^k = \alpha^+\left\{\left(L + \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \nu}\right)^k - L^k\right\}, \qquad (\text{П.27})$$

из которой следует

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{VL} = \alpha^+ (e^{\partial L/\partial \nu} - 1) e^{VL}. \qquad (\text{П.28})$$

Сравнивая (П.28) с (П.26), находим искомую связь $L$ с $\sigma'$:

$$\partial \sigma'(\bar{\nu})/\partial \bar{\nu} = e^{\partial L/\partial \nu} - 1. \qquad (\text{П.29})$$

Из (П.29) и (П.25) следует (П.15), что вместе с (П.24) и доказывает (П.14).

Академия наук СССР

Поступила в редакцию
2 августа 1957 г.

**Литература**

[1] В. Б. Берестецкий, А. Д. Галанин. Сб. Проблемы своврменной физики, *3*, 1955 г. (вводная статья).
[2] А. А. Абрикосов, Л. Д. Ландау, И. М. Халатников. ДАН СССР, **95**, 497, 773, 1177; **96**, 261, 1954.
[3] В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, **34**, 139, 1958.
[4] F. J. Dyson. Phys. Rev., **75**, 1736, 1949.
[5] Н. Н. Боголюбов. Изв. АН СССР, серия физич., **11**, 77, 1947.
[6] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 433.
[7] G. C. Wick. Phys. Rev., **80**, 268, 1950.
[8] R. P. Feynman. Phys. Rev., **76**, 749, 1949.
[9] S. Hori. Progr. Theor. Phys. **7**, 578, 1952.

---

## APPLICATION OF QUANTUM FIELD THEORY METHODS TO A SYSTEM OF BOSE-PARTICLES

*S. T. Belyaev*

The possibility of application of quantum field theory technique to a system of many Bose-particles is demonstrated. Dyson's equation for a single particle Green's function is formulated. Some properties of the condensate in a system of interacting Bose-particles are considered.