С. Т. Беляев, Г. И. Будкер

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПЛАЗМА В ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯХ *

§ 1. Введение

В работе рассматривается поведение релятивистского газа заряженных частиц, находящегося в сильном, постоянном во времени и, вообще говоря, неоднородном магнитном и электрическом поле и возмущаемого переменным электромагнитным полем, частота которого много больше частоты столкновений, так что последними можно пренебречь.

Постановка задачи следующая: известна функция распределения частиц в заданном постоянном во времени электрическом и магнитном поле. Требуется найти ее возмущение переменными во времени электрическими и магнитными полями, а также возмущение плотности и тока.

Такая задача в общем виде не решается, даже если возмущающие поля малы, ибо для решения требуется, по крайней мере, найти в явном виде решения уравнений движения частицы в невозмущенных полях, что может быть сделано только в некоторых весьма частных случаях (свободный газ, газ в постоянном магнитном поле). Решение, однако, удается получить разложением по прямым или обратным степеням отношения частоты возмущающих полей к собственным частотам частиц в невозмущенных полях. В соответствии с этим ниже рассматриваются два приближения:

1) адиабатическое приближение, когда время изменения полей много больше периода невозмущенного движения частиц;

2) баллистическое приближение, когда осуществляется обратное соотношение, т. е. период невозмущенного движения много больше периода изменения полей.

* Работа выполнена в 1953 г.

Во втором параграфе рассматривается возмущение газа в адиабатическом приближении, когда основные и возмущающие поля зависят только от цилиндрического радиуса r, а невозмущенное распределение является функцией интегралов движения частиц в основных полях. Полученные поправки к плотности и току, как и следовало ожидать, интегрально выражаются через невозмущенную функцию распределения.

В третьем параграфе рассматривается возмущение газа полем, зависящим от координаты z. Так как всякое поле, зависящее от z, можно разложить в ряд по плоским волнам, достаточно рассмотреть возмущение полем бегущей волны. Задачу о возмущении газа полем бегущей вдоль оси z волны при произвольной зависимости этого поля от r можно свести к предыдущей, если перейти в систему координат, где поле этой волны не зависит от z. Так как этот переход представляет собой формальный математический прием, то при соблюдении некоторых условий его можно производить даже тогда, когда скорость системы координат, в которую надо переходить, больше скорости света. Последнее будет осуществляться, если фазовая скорость волны меньше скорости света.

В четвертом параграфе рассматривается баллистическое приближение. Поправки к плотности и току получаются как функции невозмущенных значений плотности и тока.

Баллистическое и адиабатическое приближения не всегда являются взаимно исключающими. При наличии сильного магнитного поля существует область, где они перекрываются.

Во втором и четвертом параграфах рассматривается в виде примера случай сильного магнитного поля. Несмотря на то, что исходные выражения совершенно различны, поправки к плотности и току в этом случае в самом деле совпадают.

Нетрудно показать, что самосогласованные колебания пучка релятивистских электронов с компенсированным зарядом в наиболее интересной области частот являются адиабатическими по отношению к электронам и баллистическими — по отношению к ионам. Благодаря этому, на основе результатов предыдущих параграфов, в пятом параграфе составляются уравнения для самосогласованных колебаний стабилизированного электронного пучка. Они представляют собой систему обыкновенных интегродифференциальных уравнений и заменяют первоначальную систему интегродифференциальных уравнений в семи частных производных. Такое упрощение дает возможность в общем случае применить, по крайней мере, численный метод решения.

В одном частном случае при определенной невозмущенной функции распределения электронов и ионов удается найти

аналитическое решение задачи. Этому посвящен шестой параграф.

В последнем параграфе исследуется устойчивость полученного решения. При некоторых значениях параметров дисперсионное уравнение совпадает с найденным ранее [1].

§ 2. Адиабатическое приближение

В общем случае функция распределения электронов зависит от шести переменных (трех импульсов и трех координат). Как будет показано [2], при редких столкновениях равновесная функция распределения зависит только от трех первых интегралов движения.

Если поля меняются во времени, то, вообще говоря, распределение не остается функцией трех интегралов движения. Однако, если изменение полей происходит адиабатически (т. е. медленно по сравнению с периодом колебаний частиц), то распределение все время остается функцией только трех первых интегралов движения, при котором гамильтониан в каждый момент времени считается постоянным, а со временем меняется лишь вид этой функции. Действительно, в начальный момент времени распределение можно было выразить как функцию переменных действия I_1, I_2, I_3, которые, как известно, также являются тремя интегралами движения, но, в отличие от других интегралов движения, остаются постоянными при адиабатическом изменении гамильтониана.

Как функция переменных действия распределение вообще не меняется, а как функция других интегралов движения в произвольный момент времени выражается в виде

$$f(p_k,\ t) = f_0\left[p_i^0(p_k,\ t)\right], \tag{2.1}$$

где $f_0(p_i)$ — начальная функция распределения, а $p_i^0(p_k,\ t)$ представляет собой начальное значение импульса, выраженное через конечные значения импульсов и изменяющиеся со временем параметры, определяемые соотношением

$$I_i(p_k^0,\ t_0) = I_i(p_k,\ t), \tag{2.2}$$

где $I(p_k,\ t)$ — переменная действия, выраженная как функция импульсов.

Рассмотрим случай цилиндрической симметрии, когда как основные, так и возмущающие поля зависят только от цилиндрического радиуса r. Невозмущенную функцию распределения зададим в пространстве ε, p_φ и p_z, где ε — полная энер-

гия частицы; p_φ — момент; p_z — обобщенный импульс по оси z.

Так как p_φ и p_z остаются постоянными в этих полях, то кинетическое уравнение для f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = 0. \tag{2.3}$$

Переменная действия I в этом случае равна

$$I = 2\int_{r_1}^{r_2} p_r(\varepsilon_1,\ p_\varphi,\ p_z,\ r)\,dr = \text{const}, \tag{2.4}$$

где

$$p_r = cmu_r = \sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon - eU)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2 - m^2c^2}. \tag{2.5}$$

Из уравнения $\frac{dI}{dt} = 0$ находим явное выражение для

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2}{T}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{e}{c^2}(\varepsilon - eU)\dot{U} + \frac{e}{c}\left(p_z - \frac{e}{c}A\right)\dot{A}}{p_r(\varepsilon, p_\varphi,\ p_z,\ r)}\,dr, \tag{2.6}$$

где $T = \frac{\partial I}{\partial \varepsilon}$ — период колебаний.

Для малых колебаний положим

$$\begin{gathered} U = U_0 + u(r)\,e^{i\lambda t};\quad A = A_0 + a(r)\,e^{i\lambda t};\\ f(\varepsilon,\ p_\varphi,\ p_z,\ r) = f(\varepsilon,\ p_\varphi,\ p_z) + f_1(\varepsilon,\ p_\varphi,\ p_z,\ r)\,e^{i\lambda t}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Для поправки к функции распределения f_1 получим из (2.5) и (2.6)

$$f_1(\varepsilon,\ p_\varphi,\ p_z,\ r) =$$

$$= -\frac{2}{T}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{e}{c^2}(\varepsilon - eU_0)u + \frac{e}{c}\left(p_z - \frac{e}{c}A_0\right)a}{\sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon - eU_0)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c}A\right)^2 - m^2c^2}}\,dr. \tag{2.8}$$

Плотность и продольный ток находим из соотношения

$$rn(r) = mc \int \frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} f d\varepsilon dp_\varphi dp_z;$$
$$rj_z(r) = -mc \int \frac{\partial u_r}{\partial p_z} f d\varepsilon dp_\varphi dp_z. \qquad (2.9)$$

Интегрируя (2.9) по частям и замечая, что произведение $u_r f$ на пределах обращается в нуль, получим

$$rn(r) = -mc \int u_r \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon dp_z dp_\varphi;$$
$$rj_z(r) = mc \int u_r \frac{\partial f}{\partial p_z} d\varepsilon dp_\varphi dp_z. \qquad (2.10)$$

Подынтегральное выражение в (2.10), в отличие от (2.9), обращается в нуль на пределах. Это дает возможность при разложении n и j_z по возмущающим потенциалам не обращать внимания на пределы, хотя последние и зависят от потенциалов.

Поправки первого порядка к n и j_z равны

$$rn^{(1)}(r) = -mc \int u_r^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon} d\varepsilon dp_\varphi dp_z +$$
$$+ mc \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varepsilon} eu + \frac{e}{c} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial p_z} a \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z;$$
$$rj_z^{(1)}(r) = mc \int u_r^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial p_z} d\varepsilon dp_\varphi dp_z -$$
$$- mc \int \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \left\{ \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} eu + \frac{e}{c} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial p_z} a \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z$$

Первые члены интегрируем по частям и подставляем значение f_1 из (2.8); в результате найдем

$$rn^{(1)}(r) = mc \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} \left\{ e(u - \beta a) - \right.$$
$$\left. - \frac{2mc}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r'^{(0)}}{\partial \varepsilon} e(u' - \beta' a') dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z; \qquad (2.11a)$$

$$rj_z^{(1)}(r) = -mc \int \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} e(u - \beta a) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial p_z} \frac{2mc}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} e(u' - \beta' a') \, dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z, \quad (2.11б)$$

где введено обозначение для скорости v_z в единицах c

$$\beta(\varepsilon, p_z, r) = \frac{p_z - \frac{e}{c} A_0}{\frac{1}{c}(\varepsilon - eU_0(r))}. \quad (2.12)$$

Выражения (2.11) решают вопрос об изменении плотности и продольного тока электронов при возмущении внешних полей.

Что касается радиального тока, то он в этом приближении равен нулю. Его, однако, можно найти из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rj_r^{(1)}) = -i\lambda n^{(1)}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим для иллюстрации частный случай сильного магнитного поля, когда выражения (2.11) особенно упрощаются и допускают простое наглядное толкование.

Под сильным магнитным полем понимаем случай, когда ларморовский радиус мал по сравнению с расстоянием до оси или

$$\frac{\omega}{\Omega} \ll 1, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{v}{r}; \quad \Omega = \frac{eH}{mc}.$$

Разлагая в ряд по малым величинам, получим в этом случае, после весьма громоздких выкладок, следующие выражения для плотности и тока:

$$n^{(1)}(r) = -\frac{i}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(c \frac{E_z^{(1)}}{H^{(0)}} r n^{(0)} \right);$$

$$j_r^{(1)}(r) = -c \frac{E_z^{(1)}}{H^{(0)}} n^{(0)}; \quad (2.14)$$

$$j_z^{(1)}(r) = c \frac{E_r^{(0)}}{H^{(0)}} n^{(1)} + c \frac{E_r^{(1)}}{H^{(0)}} n^{(0)} - c \frac{E_r^{(0)} H^{(1)}}{H^{(0)2}} n^{(0)},$$

где $E^{(1)}$; $H^{(1)}$ — возмущающие поля; $E^{(0)}$; $H^{(0)}$ — невозмущенные поля.

Выражения для потока имеют вполне наглядный смысл. Они выражают тот факт, что при медленном изменении полей в сильном магнитном поле токи все время имеют дрейфовую природу, т. е. все время выполняется соотношение

$$j = c\frac{[EH]}{H^2}n. \tag{2.15}$$

§ 3. Электронный газ в поле бегущей волны

Рассмотрим ту же задачу, но в полях, зависящих также и от координаты z. Достаточно будет рассмотреть поле, зависящее от z, по закону $e^{i(\omega t - kz)}$, ибо при всякой другой зависимости поле можно разложить по z в ряд Фурье.

Задачу можно свести к предыдущей, если перейти в систему координат, движущуюся вдоль оси z со скоростью

$$v_0 = \frac{c^2 k}{\omega}. \tag{3.1}$$

Действительно, как нетрудно видеть, согласно преобразованиям Лоренца,

$$\omega t - kz = \omega' t', \tag{3.2}$$

где

$$\omega'^2 = \omega^2 - k^2 c^2, \tag{3.3}$$

т. е. в этой системе координат поля зависят только от времени.

В основу вычислений, проведенных в предыдущем параграфе, положено два предположения:

1) функция распределения зависит от импульсов и координат только через интегралы движения (ε, p_z, p_φ);

2) частота возмущающего поля много меньше собственных частот колебаний частиц в невозмущенном поле.

Нетрудно видеть, что первое условие выполняется в новой системе координат, коль скоро оно будет выполнено в лабораторной системе координат. Это следует из того, что, с одной стороны, функция распределения инвариантна [3], а с другой стороны, ε, p_φ и p_z при таком преобразовании Лоренца выражаются друг через друга.

Посмотрим теперь, какой вид будет иметь второе условие. Сделаем предварительно несколько замечаний. Как легко видеть, выражение (2.5) для u_r есть инвариант относительно

рассматриваемых преобразований. Инвариантный характер носит также операция интегрирования по r между корнями выражения (2.5). Поэтому, если $\chi_{ikl\ldots}(r)$ есть тензор некоторого ранга, то выражение

$$2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\chi_{ikl\ldots}}{u_r}\,dr$$

есть также тензор того же ранга *. В частности,

$$T_i=\frac{2}{mc^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{p_i-\frac{e}{c}A_i}{u_r}\,dr \tag{3.4}$$

является 4-вектором. Четвертая компонента этого вектора с точностью до i равна периоду $T_0\,(T_4=iT_0)$.

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующую операцию:

$$\langle\tau_i,\ \chi\rangle=\frac{2}{mc^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{p_i-\frac{e}{c}A_i}{u_r}\chi\,dr. \tag{3.5}$$

В частности, $\langle\tau_i\rangle=T_i$. Легко видеть также, учитывая (2.5) и (2.12), что

$$2mc\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial u_r}{\partial\varepsilon}(\varphi-\beta a)\,dr=-\langle\tau_i;\ a_i\rangle, \tag{3.6}$$

где

$$a_i=(a_x;\ 0;\ 0;\ i\varphi).$$

Теперь легко можно записать второе условие. В системе координат, где возмущающее поле не зависит от z, условие применимости означает

$$\omega\tau_0\ll 1.$$

Вводя 4-вектор $k_i=\left(k_1,\ k_2,\ k_3,\ i\frac{\omega}{c}\right)$ и учитывая, что в этой системе пространственные компоненты k_i равны нулю, можно

* Вообще говоря, сумма зависящих от времени и относящихся к разным точкам пространства тензоров, определенная в каждой системе как сумма их значений в один и тот же момент времени, не есть тензор, ибо в разных системах координат суммируются разные тензора. В нашем случае операция инвариантна.

записать условие применимости в релятивистски инвариантном виде

$$ck_iT_i \ll 1. \tag{3.7}$$

Выражения (2.11) легко теперь записать с помощью векторов k_i и T_i в следующем виде:

$$j_i^{(1)} = \frac{e}{imc}\int \frac{d^3p}{u_r}\left\{\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right)a_k\frac{\partial f_0}{\partial p_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)\langle\tau_e a_e\rangle}{k_m T_m}k_k\frac{\partial f_0}{\partial p_k}\right\} \tag{3.8}$$

(интегрирование по $d^3p = dp_1dp_2dp_4 = dp_z\frac{1}{r}dp_\varphi\frac{i}{c}d\varepsilon$). Последнее выражение можно несколько упростить. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{m^2c^2}\frac{p_k - \frac{e}{c}A_k}{u_r} = -\frac{\partial u_r}{\partial p_k},$$

поэтому (3.8) можно переписать в виде

$$j_i^{(1)} = iemc\int d^3p\left\{a_k\frac{\partial u_r}{\partial p_k}\frac{\partial f_0}{\partial p_i} - \frac{\langle\tau_e a_e\rangle}{k_m T_m}k_k\frac{\partial u_r}{\partial p_i}\frac{\partial f_0}{\partial p_k}\right\}.$$

Интегрируя дважды по частям первый член, получим

$$j_i^{(1)} = iemc\int d^3p\frac{\partial u_r}{\partial p_i}\frac{\partial f_0}{\partial p_k}\left(a_k - \frac{\langle\tau_e a_e\rangle}{T_m k_m}k_k\right). \tag{3.9}$$

Как было показано в предыдущем параграфе, радиальная компонента тока в этом приближении равна нулю. Заметим, что (3.9) дает правильное выражение и для радиальной компоненты, если считать, что u_r не зависит от $p_2 = p_3$, как это формально следует из (2.5).

Вместо функции f можно ввести скалярную функцию распределения F [3].

Чтобы произвести такую замену, необходимо заменить f на F в выражении вида

$$\int \chi\frac{\partial f}{\partial p_i}d^3p.$$

Проинтегрируем по частям и перейдем затем от трехмерного интеграла к четырехмерному, добавляя интегрирование по p_r

$$\int \chi \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3p = -\int f \frac{\partial \chi}{\partial p_i} d^3p =$$

$$= -mc \int f u_r \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \delta \left(\sqrt{-\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2} + mc \right) d^4p.$$

Используя [3], обратно интегрируя по частям, получим следующее правило перехода от функции f к F:

$$\int \chi \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3p = \frac{1}{ic} \int \chi \frac{\partial}{\partial p_i} (u_r F) d^4p. \tag{3.10}$$

С учетом (3.10) можно записать добавки в 4-току в виде

$$j_i^{(1)} = em \int d^4p \frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial (u_r F)}{\partial p_k} \left(a_k - \frac{\langle \tau_e a_e \rangle}{k_m T_m} k_k \right). \tag{3.11}$$

Так как u_r есть инвариант относительно рассматриваемых преобразований и интегрирование ведется по инвариантному 4-мерному объему импульсов, то (3.11) представляет собой тензорное уравнение и, следовательно, справедливо в любой системе координат. С другой стороны, (3.9) в любой системе координат эквивалентно (3.11), поэтому выражение (3.9) в любой системе координат дает поправки к плотности и току.

В раскрытом виде эти поправки имеют следующий вид:

$$n^{(1)} = \frac{em}{r} \int \frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} cu + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} a - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \omega + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} k \right) \frac{2mc}{\frac{\omega}{c} T_0 - kT} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r'}{\partial \varepsilon} (u' - \beta' a') \, dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z;$$

$$j_z^{(1)} = -\frac{em}{r} \int \frac{\partial u_r}{\partial p_z} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} cu + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} a - \right. \tag{3.12}$$

$$\left. - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \omega + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} k \right) \frac{2mc}{\frac{\omega}{c} T_0 - kT_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r'}{\partial \varepsilon} (u' - \beta' a') \, dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z,$$

где

$$T_1 = \frac{2}{mc^2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{p_z - \frac{e}{c}A}{u_r}\,dr; \quad T_0 = \frac{2}{mc^3}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon - eU}{u_r}\,dr. \qquad (3.13)$$

При выводе (3.12) мы переходили в систему координат, движущуюся со скоростью $v_0 = \frac{c^2 k}{\omega}$, которая больше скорости света, если фазовая скорость волны $\frac{\omega}{k}$ меньше скорости света. Однако очевидно, что выражения (3.12) справедливы и в этом случае, ибо ни сами эти выражения, ни условия их применимости не содержат особенности при таких длинах волн, когда фазовая скорость становится равной c. С другой стороны, совершенно ясно, что такая длина волны не является также физически выделенной при рассмотрении движения электронов. В отличие от (2.11), формулы (3.12) имеют интегрируемую особенность при $\frac{T_0}{T_1} = \frac{kc}{\omega}$. Эта особенность, однако, соответствует физике рассматриваемого явления. При этом условии наступает резонанс между волной и соответствующими частицами $\left(\frac{cT_1}{T_0} = \bar{v}_z\right)$. Если в распределении имеются такие частицы, то интеграл надо брать в определенном смысле, аналогично тому, как это делается в работе Ландау [4].

§ 4. Баллистическое приближение

В баллистическом приближении, естественно, не имеет смысла рассматривать функцию распределения в пространстве интегралов движения, ибо в данном случае влияние переменных полей на каждую частицу зависит от локальных характеристик частицы (координата, скорость в данный момент времени), а не от «средних» значений по орбите.

В этом случае будем писать кинетическое уравнение в пространстве обычных координат и скоростей.

Рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + (F_i^{(0)} + F_i^{(1)}) \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \qquad (4.1)$$

где $mF_i^{(0)}$ — сила, действующая на заряд в невозмущенных полях,

$$F_i^{(0)} = \frac{e}{m} E_i^{(0)} + \frac{e}{mc} \varepsilon_{ike} v_k H_e^{(0)} \equiv \varepsilon_i^{(0)} + \Omega_{ik}^{(0)} v_k, \qquad (4.\ 2)$$

а $mF_i^{(1)}$ — сила в возмущающих полях

$$F_i^{(1)} = \frac{e}{m} E_i^{(1)} + \frac{e}{mc} \varepsilon_{ike} v_k H_e^{(1)} \equiv \varepsilon_i^{(1)} + \Omega_{ik}^{(1)} v_k. \qquad (4.\ 3)$$

Пусть $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения невозмущенной задачи, удовлетворяющая уравнению

$$v_i \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + F_i^{(0)} \frac{\partial f_0}{\partial v_i} = 0. \qquad (4.\ 4)$$

В баллистическом приближении частица совершает малые колебания с частотой возмущающего поля λ около среднего положения, которое меняется с малой частотой. Поэтому естественно искать уравнения (4. 1) в виде

$$f(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t) = f_0[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t);\ \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)], \qquad (4.\ 5)$$

где $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t)$ — малые величины, конкретный критерий малости которых будет указан ниже. Однако мы сузили бы класс поддающихся решению случаев, если бы раскладывали функцию распределения (4. 5) по $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{u}$, так как в этом случае полученное решение было бы справедливо для достаточно гладких функций. В частности, оно не годилось бы для распределений с температурой, малой по сравнению с энергией вынужденных колебаний. В изложенном ниже способе решения не накладывается каких-либо ограничений на невозмущенную функцию распределения, а лишь на электрическое и магнитное поле.

Подставляем функцию (4. 5) в уравнение (4. 1). В результате получим

$$\frac{\partial f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho};\ \mathbf{v} - \mathbf{u})}{\partial(x_i - \rho_i)} \left\{ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k} + (F_k^{(0)} + F_k^{(1)}) \frac{\partial \rho_i}{\partial v_k} - v_i \right\} +$$

$$+ \frac{\partial f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho};\ \mathbf{v} - \mathbf{u})}{\partial(v_i - u_i)} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (F_k^{(0)} + F_k^{(1)}) \frac{\partial u_i}{\partial v_k} - \right.$$

$$\left. - F_i^{(0)} - F_i^{(1)} \right\} = 0. \qquad (4.\ 6)$$

Введем вместо r и v новые переменные

$$\xi = \mathbf{r} - \rho(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t); \qquad (4.7)$$
$$\eta = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t).$$

Тогда, ограничиваясь в уравнениях (4.6) только линейными членами по $\mathbf{u}$, ρ и $F^{(1)}$ и учитывая, что $f_0(\xi; \eta)$ удовлетворяет невозмущенному уравнению (4.4), получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi_i}\left\{\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial \rho_i}{\partial \eta_k} - u_i\right\} +$$
$$+ \frac{\partial f_0}{\partial \eta_i}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial \eta_k} - \rho_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k} - u_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \eta_k} - \right.$$
$$\left. - F_i^{(1)}\right\} = 0. \qquad (4.8)$$

Это уравнение может быть удовлетворено, если приравнять нулю оба выражения в фигурных скобках, в результате чего получим систему уравнения для определения $\rho_i(\xi; \eta; t)$ и $u_i(\xi; \eta; t)$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial \eta_k} - \rho_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k} - u_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \eta_k} = F_i^{(1)}$$
$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial \rho_i}{\partial \eta_k} - u_i = 0. \qquad (4.9)$$

До сих пор мы нигде не использовали условия баллистичности. Вообще говоря, баллистический метод применим в том случае, когда частота возмущающих полей много больше собственных частот системы.

Однако при наличии сильного магнитного поля метод решения уравнения (4.9), который мы применим ниже, затягивается до значительно более низких значений частоты возмущающих полей.

Введем, кроме ларморовской частоты частицы в магнитном поле Ω, еще величину $\omega = \frac{v_r}{R}$, где v_r — средняя скорость частицы, а R — размер системы. В слабом магнитном поле невозмущенная частота системы порядка ω, а в сильном поле порядка Ω. Между тем для решения уравнений (4.6) мы потребуем только выполнения неравенства

$$\frac{\omega}{\lambda} \ll 1. \qquad (4.10)$$

Будем искать решение в виде разложения по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$. В первом приближении можно пренебречь членами

$$\eta_{lk}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k};\quad \rho_k\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k};\quad \eta_{lk}\frac{\partial \rho_i}{\partial \xi_k},$$

которые, как нетрудно видеть, следующего порядка малости по $\frac{\omega}{\lambda}$. В результате получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t}+F_k^{(0)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \eta_{lk}}-u_k^{(1)}\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \eta_{lk}}=F_i^{(1)};\\ \frac{\partial \rho_i^{(1)}}{\partial t}+F_k^{(0)}\frac{\partial \rho_i^{(1)}}{\partial \eta_{lk}}-u_i^{(1)}=0.\end{gathered}\tag{4.11}$$

Зависимость от времени $F_i^{(1)}$, а следовательно, и $u_i^{(1)}$, $\rho_i^{(1)}$, определяется посредством множителя $e^{i\lambda t}$. Ищем решение (4.11), линейно зависящее от скоростей η_i

$$\begin{aligned}u_i&=\alpha_i+\alpha_{ik}\eta_k;\\ \rho_i&=\beta_i+\beta_{ik}\eta_k.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Тогда для α и β получаем

$$\begin{gathered}\left(i\lambda\delta_{ek}-\Omega_{ek}^{(0)}\right)\alpha_{je}+\Omega_{je}^{(0)}\alpha_{ek}=\Omega_{jk}^{(1)};\\ \left(i\lambda\delta_{jk}-\Omega_{jk}^{(0)}\right)\alpha_k+\alpha_{jk}\varepsilon_k^{(0)}=\varepsilon_j^{(1)};\\ \left(i\lambda\delta_{ek}-\Omega_{ek}^{(0)}\right)\beta_{je}-\alpha_{jk}=0;\\ i\lambda\beta_j+\beta_{jk}\varepsilon_k^{(0)}-\alpha_j=0\end{gathered}\tag{4.13}$$

(всего 24 линейных алгебраических уравнения для определения 24 коэффициентов α_j; α_{jk}; β_j и β_{jk}).

Решая эту систему уравнений и подставляя α и β в (4.12), получим $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{u}$ как функции $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$. С точностью до квадратичных членов по ρ и u можно заменить $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ на $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Функции $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ \mathbf{t})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ \mathbf{t})$ решают задачу о нахождении распределения в возмущающих полях $f(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)$, если известно невозмущенное распределение $f_0(\mathbf{r},\ \mathbf{v})$. Согласно (4.5) имеем

$$f(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)=f_0[\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t);\ \mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)].$$

Ток и плотность частиц определяются, как обычно, из соотношений

$$n(\mathbf{r};\ t)=\int f(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)\,d\mathbf{v}=\int f_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho};\ \mathbf{v}-\mathbf{u})\,d\mathbf{v};$$
$$j(\mathbf{r};\ t)=\int \mathbf{v}f(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)\,d\mathbf{v}=\int \mathbf{v}f_0(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho};\ \mathbf{v}-\mathbf{u})\,d\mathbf{v}. \qquad (4.\ 14)$$

Перейдем теперь в (4. 5) от переменной $\mathbf{v}$ к интегрированию по $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r};\ \mathbf{v};\ t)$. Вычислим якобиан перехода $\frac{\partial(v)}{\partial(\eta)}$. Используя соотношение (4. 12), можно написать

$$v_i=\eta_i+d_i+\alpha_{ik}\eta_k,$$

откуда $\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \boldsymbol{\eta}_k}=\delta_{ik}+\alpha_{ik}$, и, следовательно, якобиан перехода равен

$$Det\left|\frac{\partial v_i}{\partial \eta_k}\right|=1+\frac{\partial u_i}{\partial \eta_k}+0(u^2)=1+\alpha_{ii}+0(u^2).$$

Для определения суммы α_{ii} рассмотрим второе из уравнений (4. 13)

$$\left(i\lambda\delta_{ek}+\Omega^{(0)}_{ek}\right)\alpha_{je}+\Omega^{(0)}_{je}\alpha_{ek}=\Omega^{(1)}_{jk}.$$

Полагаем $j=k$, суммируем по всем j и, замечая, что

$$\Omega^{(1)}_{jk}=0 \text{ при } j=k,$$

получим

$$\left(i\lambda\delta_{ej}+\Omega^{(0)}_{ej}-\Omega^{(0)}_{ej}\right)\alpha_{je}=0,$$

откуда следует

$$\alpha_{ii}=0.$$

Таким образом, в нулевом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ якобиан $\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\eta)}$ равен единице с точностью до членов, квадратичных по возмущающим полям $F^{(1)}$. В следующем же приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ якобиан, вообще говоря, содержит также и линейные члены по возмущающим полям, т. е. с точностью до $F^{(1)2}$ можно написать

$$\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\boldsymbol{\eta})}=1+\delta,$$

где

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \simeq \frac{\omega}{\lambda}\frac{u}{\eta} \sim \frac{\rho}{R}.$$

Поэтому вместо (4. 14) можно написать

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r};\ t) &= \int f_0[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r};\ \boldsymbol{\eta};\ t);\ \boldsymbol{\eta}](1+\delta)\,d\boldsymbol{\eta}; \\ j(\mathbf{r};\ t) &= \int [\boldsymbol{\eta} + \mathbf{u}(\mathbf{r};\ \boldsymbol{\eta};\ t)] f_0[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r};\ \boldsymbol{\eta};\ t);\ \boldsymbol{\eta}](1+\delta)\,d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \tag{4. 15}$$

Разлагая f_0 в ряд по $\boldsymbol{\rho}$*, получим для поправок к плотности и току

$$\begin{aligned} n^{(1)}(\mathbf{r},\ t) &= -\int \frac{\partial f_0}{\partial x_i}\rho_i d\boldsymbol{\eta} + \int f_0 \delta d\boldsymbol{\eta}; \\ j^{(1)}(\mathbf{r};\ t) &= \int u_i f_0 d\boldsymbol{\eta} - \int \eta_{i}\frac{\partial f_0}{\partial x_k}\rho_k d\boldsymbol{\eta} + \int \eta_i f_0 \delta \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \tag{4. 16}$$

Нетрудно видеть, что в выражении для тока два последних члена одного порядка и относятся к первому, как $\frac{\omega}{\lambda}$; поэтому в нулевом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ ими можно пренебречь. Что касается плотности, то там все члены одного порядка, так что поправка к плотности в этом приближении равна нулю.

Таким образом, в нулевом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ получаем

$$\begin{aligned} n^{(1)} &= 0; \\ j^{(1)} &= \alpha_i n^{(0)} + \alpha_{ik} j_k^{(0)}. \end{aligned} \tag{4. 17}$$

Чтобы найти поправку к плотности, нет, однако, необходимости находить $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\rho}$ в следующем приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$, а достаточно воспользоваться уравнением непрерывности. В данном случае, в отличие от адиабатического приближения, поправка к плотности оказывается более высокого порядка малости, чем поправка к току.

Для поправки к плотности получаем

$$n^{(2)} = \frac{i}{\lambda}\frac{\partial j_i^{(1)}}{\partial x_i} = \frac{i}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}\{\alpha_i n^{(0)} + \alpha_{ik} j_k^{(0)}\}. \tag{4. 18}$$

---

* По первому аргументу, в отличие от второго, функцию $f_0(\mathbf{r};\ \mathbf{v})$ всегда можно раскладывать в ряд, так как $\frac{\rho}{R} \ll 1$.

Для получения следующих членов разложения по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$ нужно полученное первое приближение подставить в опущенные члены и искать решение в виде

$$u_i^{(2)} = \alpha_i^{(2)} + \alpha_{ik}^{(2)}\eta_k + \alpha_{ike}^{(2)}\eta_k\eta_e;$$
$$\rho_i^{(2)} = \beta_i^{(2)} + \beta_{ik}^{(2)}\eta_k + \beta_{ike}^{(2)}\eta_k\eta_e. \qquad (4.\ 19)$$

Для коэффициентов получается соответствующая система линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, разложение по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$ сводит задачу о решении дифференциального уравнения в частных производных к решению систем линейных алгебраических уравнений.

В частном случае $\frac{\Omega}{\lambda} \ll 1$ (собственно баллистическом) задача особенно упрощается, и можно сразу написать рекуррентную формулу для всех приближений.

В этом случае члены $\Omega^{(0)}$ и $F_k^{(0)}\frac{\partial u}{\partial v_k}$ также малы, и поэтому

$$u_i^{(1)} = \frac{F_i^{(1)}}{i\lambda}; \quad \rho_i^{(1)} = \frac{u_i^{(1)}}{i\lambda};$$
$$u_i^{(n+1)} = -\frac{1}{i\lambda}\left\{\eta_k\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial\xi_k} + F_k^{(0)}\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial\tau_{ik}} - \Omega_{ik}^{(0)}u_k^{(n)}\right\} + \frac{\rho_k^{(n-1)}}{i\lambda}\frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial\xi_k}; \qquad (4.\ 20)$$
$$\rho_i^{(n+1)} = \frac{u_i^{(n+1)}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda}\left\{\eta_k\frac{\partial\rho_i^{(n)}}{\partial\xi_k} + F_k^{(0)}\frac{\partial\rho_i^{(n)}}{\partial\tau_{ik}}\right\}.$$

Рассмотрим определенную геометрию полей, осуществляющуюся в электронном пучке [1]. Пусть основное электрическое поле направлено по цилиндрическому радиусу, а магнитное — по φ. Возмущающие поля имеют составляющие: магнитное — только по φ, а электрическое — по радиусу и z, причем все поля зависят от r

$$\varepsilon_r^{(0)} = \varepsilon_1^{(0)} = \varepsilon^{(0)}; \quad \Omega_{31}^{(0)} = -\Omega_{13}^{(0)} = \Omega;$$
$$\varepsilon_r^{(1)} = \varepsilon_1^{(1)}; \qquad (4.\ 21)$$
$$\varepsilon_z^{(1)} = \varepsilon_3^{(1)}; \quad \Omega_{31}^{(1)} = -\Omega_{13}^{(1)} = \Omega^{(1)},$$

а остальные компоненты равны нулю.

Для отличных от нуля 12 коэффициентов получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&x\alpha_{11}+\Omega\alpha_{13}+\Omega\alpha_{31}=0; && x\beta_{11}+\Omega\beta_{13}-\alpha_{11}=0;\\
&x\alpha_{13}+\Omega\alpha_{11}+\Omega\alpha_{33}=\Omega^{(1)}; && x\beta_{13}-\Omega\beta_{11}-\alpha_{13}=0;\\
&x\alpha_{1}+\Omega\alpha_{3}+\varepsilon_1^{(0)}\alpha_{11}=\varepsilon_1^{(1)}; && x\beta_{1}+\varepsilon_1^{(0)}\beta_{11}-\alpha_{1}=0;\\
&x\alpha_{31}+\Omega\alpha_{33}-\Omega\alpha_{11}=\Omega^{(1)}; && x\beta_{31}+\Omega\beta_{33}-\alpha_{31}=0;\\
&x\alpha_{33}-\Omega\alpha_{31}-\Omega\alpha_{13}=0; && x\beta_{33}-\Omega\beta_{31}-\alpha_{33}=0;\\
&x\alpha_{3}-\Omega\alpha_{1}+\varepsilon_1^{(0)}\alpha_{31}=\varepsilon_3^{(1)}; && x\beta_{3}+\varepsilon_1^{(0)}\beta_{31}-\alpha_{3}=0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Через x временно обозначено $i\lambda$.

Умножая три первых уравнения каждого столбца на i и складывая с соответствующими уравнениями столбца, получим шесть уравнений для комплексных величин:

$$\begin{aligned}
&(x-i\Omega)\,a_1+\Omega a_3=i\Omega^{(1)}; && xb_1+\Omega b_3-a_1=0;\\
&-\Omega a_1+(x-i\Omega)\,a_3=-\Omega^{(1)}; && -\Omega b_1+xb_3-a_3=0;\\
&(x-i\Omega)\,a_0+\varepsilon_1^{(0)}a_1=\varepsilon^{(1)}; && xb_0+\varepsilon_1^{(0)}b_1-a_0=0,
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}
\alpha_1+i\alpha_3=a_0;\quad \alpha_{11}+i\alpha_{31}=a_1;\quad \alpha_{31}+i\alpha_{33}=a_3;\\
\beta_1+i\beta_3=b_0;\quad \beta_{11}+i\beta_{31}=b_1;\quad \beta_{31}+i\beta_{33}=b_3;\\
\varepsilon_1^{(1)}+i\varepsilon_3^{(1)}=\varepsilon^{(1)}.
\end{gathered}$$

Теперь уже уравнения легко решаются, так как система распадается и приходится решать одновременно не более двух уравнений.

Решения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
a_0=\frac{x\varepsilon^{(1)}-i\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{x\,(x-i\Omega)};\quad a_1=i\frac{\Omega^{(1)}}{x};\quad a_3=-\frac{\Omega^{(1)}}{x};\\
b_0=\frac{x\varepsilon^{(1)}-i\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{x^2\,(x-i\Omega)}-\frac{i\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{x^2\,(x+i\Omega)};\quad b_1=\frac{i\Omega^{(1)}}{x\,(x+i\Omega)};\\
b_3=-\frac{\Omega^{(1)}}{x\,(x+i\Omega)}.
\end{gathered} \tag{4.23}$$

Отделяя действительную и мнимую части (при этом формально считаем $x=i\lambda$ действительной величиной), получим

$$\alpha_1=\frac{1}{\lambda^2-\Omega^2}\left(\Omega\varepsilon_3^{(1)}-i\lambda\varepsilon_1^{(1)}+i\,\frac{\Omega\Omega^{(1)}}{\lambda}\varepsilon^{(0)}\right);\quad \alpha_{11}=\alpha_{33}=0;$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2}\left(-\Omega\varepsilon_1^{(1)} - i\lambda\varepsilon_3^{(1)} + \Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}\right); \quad \alpha_{31} = -\alpha_{13} = -i\,\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda};$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2}\left(-\varepsilon_1^{(1)} - i\,\frac{\Omega}{\lambda}\,\varepsilon_3^{(1)}\right); \quad \beta_{11} = \beta_{33} = i\,\frac{\Omega^{(1)}\Omega}{\lambda\,(\lambda^2 - \Omega^2)}; \quad (4.24)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2}\left(-\varepsilon_3^{(1)} + i\,\frac{\Omega}{\lambda}\,\varepsilon_1^{(1)} - 2i\,\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\,\varepsilon^{(0)}\right); \quad \beta_{13} = -\beta_{31} = \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda^2 - \Omega^2}.$$

Поправки к плотности и току можно записать в виде

$$j_z^{(1)}(\mathbf{r},\ t) = \frac{n^{(0)}}{\lambda^2 - \Omega^2}\left(-\Omega\varepsilon_1^{(1)} - i\lambda\varepsilon_3^{(1)} + \Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}\right);$$

$$j_r^{(1)}(\mathbf{r};\ t) = \frac{n_0}{\lambda^2 - \Omega^2}\left(\Omega\varepsilon_3^{(1)} - i\lambda\varepsilon_1^{(1)} + i\,\frac{\Omega^{(1)}\Omega}{\lambda}\,\varepsilon^{(0)}\right); \quad (4.25)$$

$$n^{(2)}(\mathbf{r};\ t) = \frac{i}{\lambda}\,\frac{\partial j_r^{(1)}}{\partial r}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Основные поля малы, т. е. $\frac{\Omega}{\lambda} \ll 1$ и $\varepsilon^{(0)} \ll \lambda\eta$. В этом случае

$$\begin{aligned} u_1 &= -i\,\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\lambda} + i\,\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\,\eta_3 = \frac{F_1^{(1)}}{i\lambda}; \quad \rho_1 = \frac{u_1}{i\lambda}; \\ u_3 &= -i\,\frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\lambda} - i\,\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\,\eta_1 = \frac{F_3^{(1)}}{i\lambda}; \quad \rho_3 = \frac{u_3}{i\lambda}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

т. е. $\mathbf{u}$ и ρ имеют такой же вид, как и для свободного газа в возмущающих полях. Этот случай и является собственно баллистическим.

Выражения для плотности и тока в этом случае имеют следующий вид:

$$j_z^{(1)}(\mathbf{r},\ t) = -\frac{i}{\lambda}\,\varepsilon_3^{(1)} n_0;$$

$$j_r^{(1)}(\mathbf{r},\ t) = -\frac{i}{\lambda}\left(\varepsilon_1^{(1)} n_0 - \Omega^{(1)} j^{(0)}\right); \quad (4.27)$$

$$n^{(2)}(\mathbf{r},\ t) = \frac{i}{\lambda}\,\frac{\partial j_r^{(1)}}{\partial r}.$$

2. $\Omega \gg \lambda$. Теперь для поправок к скоростям имеем

$$u_1 = -\frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\Omega} + i\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\left(\eta_3 - \frac{\varepsilon^{(0)}}{\Omega}\right) = \\ = -c\frac{E_z^{(1)}}{H_0} + i\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\left(\eta_3 - c\frac{E^{(0)}}{H^{(0)}}\right); \\ u_3 = \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega} - \frac{\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{\Omega^2} - i\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\eta_1 = \\ = c\frac{E_r^{(1)}}{H^{(0)}} - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega}\frac{E^{(0)}}{H^{(0)}}c - i\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}\eta_1. \tag{4.28}$$

Члены, не содержащие i, т. е. находящиеся в фазе с возмущающими полями, представляют собой поправки к дрейфу вследствие изменения электрического и магнитного поля. Остальные члены являются возмущениями движения частицы на орбите и не сказываются на изменении потока и плотности. Действительно, поправки в этом случае к току имеют следующий вид:

$$j_z^{(1)} = \left(\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega} - \frac{\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{\Omega^2}\right)n^{(0)}; \\ j_r^{(1)} = -\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega}n^{(0)} - i\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega\lambda}(\varepsilon^{(0)}n^{(0)} - \Omega j^{(0)}). \tag{4.29}$$

С другой стороны, из кинетического уравнения для невозмущенной функции распределения легко получить соотношение

$$\frac{\partial T_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} = \varepsilon_i^{(0)}n^{(0)} + \Omega_{ie}j_e^{(0)}, \tag{4.30}$$

где $T_{ik}^{(0)}$ — тензор натяжений, определяемый равенством

$$T_{ik}^{(0)} = \int \eta_i\eta_k f_0 d\boldsymbol{\eta}. \tag{4.31}$$

В нашем случае (4.30) имеет вид

$$\frac{\partial T_{rr}^{(0)}}{\partial r} = \varepsilon^{(0)}n^{(0)} - \Omega j^{(0)}. \tag{4.32}$$

Используя это соотношение, получаем для $j_r^{(1)}$

$$j_r^{(1)} = -\frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\Omega}n^0 - i\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda\Omega}\frac{\partial T_{rr}^{(0)}}{\partial r}. \tag{4.33}$$

Легко видеть, что второй член в $\frac{\omega}{\lambda}$ раз меньше первого, так как

$$\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda\Omega}\frac{\partial T_{rr}^{(0)}}{\partial r} \sim n^0 \frac{\Omega^{(1)}\omega v}{\lambda\Omega} \sim \frac{\omega}{\lambda} n^{(0)} v \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega} \sim \frac{\omega}{\lambda} n^{(0)} \frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\Omega}.$$

Таким образом, в выражении для тока остаются только дрейфовые члены

$$\begin{aligned} j_z^{(1)} &= \left(c\frac{E_r^{(1)}}{H^{(0)}} - c\frac{\Omega^{(1)}}{\Omega}\frac{E^{(0)}}{H^{(0)}} \right) n^{(0)}; \\ j_r^{(1)} &= -c\frac{E_z^{(1)}}{H^{(0)}} n^{(0)}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

что с точностью до члена $\frac{\varepsilon^{(0)}}{\Omega} n^{(0)}$ (который в данном случае есть малая более высокого порядка) совпадает с выражением (2.14) в соответствии с тем, что, несмотря на различие метода, условия, в которых выводились эти выражения, одинаковы.

Сравнивая случаи $\frac{\Omega}{\lambda} \ll 1$ и $\frac{\Omega}{\lambda} \gg 1$, видим, что в первом случае поправки к току (4.34) содержат множитель $-i$, т. е. отстают по фазе от полей на $\frac{\pi}{2}$, а во втором случае (4.34) совпадают по фазе с полями.

Это вполне естественно, ибо в слабом магнитном поле возмущающей силе пропорционально ускорение, а в сильном — среднее значение скорости (дрейф).

3. Случай $\Omega = \lambda$ требует особого рассмотрения. В этом случае выражения для u и ρ обращаются в бесконечность.

Физический смысл резонанса весьма нагляден. Так как $\Omega = \lambda \gg \omega$ создает сильное замагничение, то частота вращения совпадает с частотой возмущающего электрического поля; частица резонансно ускоряется, как в циклотроне.

Эта особенность не связана с приближением по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$, а обусловлена тем, что мы не учитывали членов, квадратичных по u и ρ. Так как разложение по $\frac{\omega}{\lambda}$ есть по существу разложение по градиентам полей, а в неоднородном магнитном поле частота вращения частицы зависит от ее скорости, то учет следующих членов разложения по $\frac{\omega}{\lambda}$ приведет только к тому, что место резонанса будет слегка за-

висеть от невозмущенной скорости. Учет нелинейных членов по u приводит в неоднородном магнитном поле к изменению частоты вращения в процессе ускорения так, что частицы, бывшие в резонансе, со временем выпадают из него. В этом случае существенную роль начинают играть колебания не с частотой возмущающего поля, а с частотой так называемых фазовых колебаний. Правда, если учесть столкновения, то со временем пропадает всякое упорядоченное ускорение и замедление частиц; однако период релаксации настолько велик, что во многих случаях он оказывается больше всего времени возмущения.

Оценить предельную скорость, которую наберут частицы, можно следующим образом. Если ψ — разность между фазой положения частицы на ларморовском кружке и фазой электрического поля, то

$$\dot{\psi} = \Omega - \lambda.$$

С другой стороны,

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial v}\dot{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial v}\frac{e}{m}E^{(1)}\sin\psi.$$

В результате получаем

$$\ddot{\psi} + \omega_{\text{фаз}}^2 \sin\psi = 0,$$

где

$$\omega_{\text{фаз}}^2 = \frac{eE^{(1)}}{m}\frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

представляет собой частоту «фазовых колебаний». Фаза ψ колеблется в пределах порядка единицы $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, откуда колебания Ω

$$\Delta\Omega \sim \omega_{\text{фаз}}\Delta\psi \approx \omega_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{eE^{(1)}}{m}\frac{\partial \Omega}{\partial v}},$$

а интересующая нас величина

$$u_{\text{пред}} = \Delta v = \frac{1}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}}\Delta\Omega = \frac{\omega_{\text{фаз}}}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}},$$

или

$$u_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{eE^{(1)}}{m\frac{\partial \Omega}{\partial v}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(1)}}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}}}.$$

Не будем останавливаться подробно на вычислении величины $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$, а оценим ее из следующих соображений. Величина Ω зависит от скорости только вследствие градиентов магнитного поля, так что она должна содержать в качестве множителя некоторую степень $\frac{\rho}{R}$, где ρ — ларморовский радиус, а R — размеры системы (на которых меняется Ω). Первая степень градиентов, однако, не должна входить, так как $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$ не зависит от направления градиента. Таким образом, по порядку величины

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v} \simeq \frac{\Omega}{v}\frac{\rho^2}{R^2} = \frac{1}{v}\frac{\omega^2}{\Omega},$$

откуда

$$u_{\text{пред}} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon^{(1)}\Omega v}}{\omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon^{(1)}\lambda v}}{\omega}.$$

Поправки к плотности или потоку в данной точке определяются интегралами типа *

$$\int u f_0 d\mathbf{v} \sim \int\limits_{\Delta\Omega} u_{\text{пред}} f_0 d\mathbf{v} + \int u f_0 d\mathbf{v},$$

где первый интеграл берется от $u_{\text{пред}}$ по области скоростей, где частота резонансна частоте поля, а второй — от обычного значения u по всей остальной области v. Ширина резонансной области $\Delta\Omega \sim \omega_{\text{фаз}} = \sqrt{\varepsilon^{(1)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}}$, и соответствующая ей ширина интервала скоростей

$$\Delta v = \frac{\Delta\Omega}{\frac{\partial\Omega}{\partial v}} = u_{\text{пред}}.$$

Таким образом, первый интеграл относится ко второму, как $\left(\bar{u}$ — среднее значение u в нерезонансной области, $\bar{u} \sim \frac{\varepsilon^{(1)}}{\lambda}\right)$

$$\frac{u_{\text{пред}}\Delta v}{\bar{u}v} = \frac{u^2_{\text{пред}}}{\bar{u}v} \sim \frac{\lambda^2}{\omega^2} \gg 1,$$

---

* Эти соображения правильны, если имеется достаточный разброс по скоростям $v \gg u_{\text{пред}}$.

т. е. в тех точках, где $\Omega \sim \lambda$, основной вклад в выражение для поправки к току и плотности дают частицы, резонансно раскачивающиеся полем.

Вклад резонансно раскачивающихся частиц в полный ток оценивается следующим образом:

$$j^{(1)}_{\text{пол}} = 2\pi \int\limits_{\Delta\Omega} u_{\text{пред}} n^0(r)\, r dr + \\ + \int u n^{(0)}(r)\, r dr \sim 2\pi n^{(0)} [u_{\text{п ред}} r_{\text{рез}} \Delta r + \bar{u} R^2],$$

где первый интеграл берется по области Δr вблизи $r = r_{\text{рез}}$. Ширину области Δr можно оценить

$$\Delta r = \frac{\Delta\Omega}{\frac{\partial\Omega}{\partial r}} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} R = \frac{\omega_{\text{фаз}}}{\Omega} R.$$

Первый интеграл относится ко второму, как

$$\frac{u_{\text{пред}}}{\bar{u}} \frac{r\Delta r}{R^2} = \frac{u_{\text{пред}} \omega_{\text{фаз}}}{\varepsilon^{(1)}} \cdot \frac{r_{\text{рез}}}{R} = \frac{r_{\text{рез}}}{R}.$$

Таким образом, если максимальное значение Ω не намного больше λ (т. е. $r_{\text{рез}} \sim R$), то интегральный вклад от резонансно раскачивающихся частиц порядка вклада всех остальных. При $\Omega \gg \lambda$, $r_{\text{рез}} \ll R$ и резонансом можно пренебречь.

Из релятивистских случаев, когда применим баллистический метод, рассмотрим только один.

Пусть в рассмотренной выше геометрии полей имеется большая упорядоченная скорость $v_0 \approx c$ в направлении оси z, а разброс скоростей около v_0 мал. Такое состояние возможно только, если, наряду с магнитным полем, имеется сильное электрическое поле, почти равное магнитному так, что результирующая радиальная сила мала, между тем каждый член суммы (магнитный и электрический), вообще говоря, не мал.

Кинетическое уравнение отличается в этом случае от нерелятивистского (4. 1) тем, что вместо F_1 и F_3 стоят, соответственно, $\frac{1}{\gamma_0} F_1$ и $\frac{1}{\gamma_0^3} F_3$, что связано с различием так называемой продольной и поперечной массы.

При этом, если разброс скоростей достаточно мал $\frac{\Delta v}{c} \ll \frac{1}{\gamma_0^3}$, то под γ_0 можно понимать величину

$$\gamma_0 = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

В этом случае уравнения для u_i и ρ_i получаются такого же типа, что и в нерелятивистском случае, и решения их в первом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ имеют вид

$$u_1 = \frac{1}{\gamma_0^4\lambda^2 - \Omega^2}\left\{\Omega\varepsilon_3^{(1)} - i\gamma_0^3\lambda\varepsilon_1^{(1)} + i\frac{\Omega\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{\gamma_0\lambda}\right\} + \frac{i\Omega^{(1)}}{\gamma_0\lambda}\eta_3; \quad (4.35)$$

$$u_3 = \frac{1}{\gamma_0^4\lambda^2 - \Omega^2}\left\{-\Omega\varepsilon_1^{(1)} - i\gamma_0\lambda\varepsilon_3^{(1)} + \Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}\right\} + i\frac{\Omega^{(1)}}{\gamma_0^3\lambda}\eta_1.$$

Пренебрегая разбросом скоростей и учитывая, что $\varepsilon^{(0)} = \Omega v_0$, имеем:

$$u_1 = \frac{1}{\gamma_0^4\lambda^2 - \Omega^2}\left\{\Omega\varepsilon_3^{(1)} - i\gamma_0^3\lambda\varepsilon_1^{(1)} + i\frac{\Omega^2}{\gamma_0\lambda}\Omega^{(1)}v_0\right\}; \quad (4.36)$$

$$u_3 = \frac{1}{\gamma_0^4\lambda^2 - \Omega^2}\left\{-\Omega\varepsilon_1^{(1)} - i\gamma_0\lambda\varepsilon_3^{(1)} + \Omega\Omega^{(1)}v_0\right\};$$

$$j_k = u_k n^{(0)}.$$

В собственно баллистическом случае ($\Omega \ll \gamma_0\lambda$)

$$u_1 = -i\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\gamma_0\lambda} + i\frac{\Omega^{(1)}}{\gamma_0\lambda}v = \frac{F_1^{(1)}}{i\gamma_0\lambda}; \quad (4.37)$$

$$u_3 = -i\frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\gamma_0^3\lambda} = \frac{F_3^{(1)}}{i\gamma_0^3\lambda}.$$

Как видно из (4.35), условие резонанса теперь имеет вид $\lambda = \frac{1}{\gamma_0^2}\Omega$. Это на первый взгляд кажется парадоксальным, так как в системе координат, где $v_0 = 0$, условие резонанса имеет вид $\lambda^1 = \Omega^1$, а факт резонанса, казалось бы, не должен зависеть от системы координат. В действительности, однако, Ω и λ преобразуются неодинаково: Ω преобразуется, как магнитное поле, которое в системе, где $v_0 = 0$, в γ_0 раз меньше, тогда как λ преобразуется как 4-я компонента волнового вектора k; а так как в нашей системе пространственные компоненты k равны нулю, то в системе $v_0 = 0$ λ увеличивается в γ_0 раз.

§ 5. Собственные колебания стабилизированного электронного пучка

Колебания пучка можно разбить на три группы.

К первой группе относятся волны с длиной, много меньшей радиуса пучка. Для таких волн пучок представляет собой как бы

бесконечную среду с заданной температурой электронов. Эти колебания не представляют опасности с точки зрения устойчивого существования пучка.

Ко второй группе относятся колебания с длиной волны порядка «длины орбиты»*. В этом случае, вообще говоря, возможно своеобразное резонансное взаимодействие между волной и отдельными частицами. Эти резонансы выступают в нелинейном приближении, и поэтому строгое математическое исследование в этой области практически невозможно.

К третьей группе относятся колебания с длиной волны, много большей длины орбиты (в частности, просто радиальные пульсации пучка). Нахождение уравнений этих колебаний и представляет содержание настоящего параграфа.

Можно рассматривать два типа пульсаций пучка: быстрые и медленные. Быстрые пульсации происходят с частотой порядка собственных частот электронов в практически покоящемся ионном газе.

Частота этих колебаний

$$\omega_{эл}^2 = \frac{2\pi e^2 n}{\gamma_0 m}$$

может быть выражена через температуру электронов в лабораторной системе:

$$\theta = 2\pi e^2 n \frac{r^{*2}}{2},$$

и тогда

$$\omega_{эл}^2 = \frac{2\theta}{\gamma_0 m r^{*2}} = \frac{P_{эл}}{\gamma_0 m N}, \qquad (5.1)$$

где $P_{эл}$ — давление; N — число частиц на 1 *см* длины пучка, т. е. эта частота порядка отношения электронного давления к массе электронов в 1 *см* длины пучка.

В электронной системе координат эти пульсации представляют собой колебания электронов в заданной потенциальной яме, поэтому они заведомо устойчивы.

Вопрос об устойчивости может ставиться только к совместным колебаниям электронов и ионов.

Частота этих колебаний, по аналогии с (5. 1), равна

$$\omega^2 \sim \frac{P_{эл} + P_{ион}}{(\gamma m + M) N}. \qquad (5.2)$$

Собственная же частота колебаний ионов равна

$$\omega_{ион}^2 = \frac{P_{ион}}{MN}. \qquad (5.3)$$

* При больших токах длина орбиты порядка диаметра пучка.

Если температура электронов много больше температуры ионов, а упорядоченная скорость электронов не слишком велика $\left(\gamma_0 \ll \frac{M}{m}\right)$, то

$$\frac{\omega^2}{\omega_{эл}^2} \sim \frac{\gamma_0 m}{M} \ll 1; \quad \frac{\omega^2}{\omega_{ион}^2} \sim \frac{P_{эл}}{P_{ион}} \sim \frac{\theta_{эл}}{\theta_{ион}} \gg 1. \tag{5.4}$$

Таким образом, совместные колебания электронов и ионов являются адиабатическими по отношению к электронам и баллистичными — по отношению к ионам.

Уравнения колебаний получим, подставляя в уравнения Максвелла для возмущающих полей

$$\Delta \mathbf{a} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla u - \frac{4\pi e}{c}(\mathbf{j}_2^{(1)} - \mathbf{j}_1^{(1)}); \tag{5.5}$$

$$\Delta u + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \mathbf{a} = -4\pi e\,(n_2^{(1)} - n_1^{(1)})\,*.$$

Значения для плотности и тока электронов и ионов в свою очередь выражены через потенциалы a и u; при этом для электронов надо воспользоваться выражениями (3.12), а для ионов — найденными в предыдущем параграфе для баллистического приближения

$$n_2^{(1)} = -\frac{e}{M\omega^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r n_2^{(0)}\frac{du}{dr}\right) + \frac{ek^2}{M\omega^2} n_2^{(0)} u - \frac{ek}{Mc\omega} n_2^{(0)} a \tag{5.6}$$

$$j_{2z} = -en_2^{(0)}$$

(лишние члены в выражении (5.6) связаны с зависимостью потенциалов от z, которую мы там не рассматривали). В результате уравнения собственных колебаний пучка примут вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da}{dr}\right) - \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left[ku - \frac{\omega}{c}a\right] = -\frac{4\pi e}{c} j_z^{(1)};$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) r\frac{du}{dr}\right] - k\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left(ku - \frac{\omega}{c}a\right) = -4\pi e n^{(1)}, \tag{5.7}$$

где $j_z^{(1)}$ и $n^{(1)}$ определяются согласно (3.12). Подставляя их значения в (5.7) и собирая должным образом члены, получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da}{dr}\right) + \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) - L_{22}(r)\right] a - \left[\frac{k\omega}{c}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) - L_{21}(r)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\int_0^\infty K_{21}(r,r')\,u(r')\,dr' + \frac{1}{r}\int_0^\infty K_{22}(r,r')\,a(r')\,dr';$$

* Несколько необычная форма уравнения связана с тем, что дополнительное условие Лоренца у нас не выполняется.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)r\frac{du}{dr}\right]-\left[k^2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)+L_{11}(r)\right]u+$$

$$+\left[\frac{k\omega}{c}\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)-L_{12}(r)\right]a=\frac{1}{r}\int_0^\infty K_{11}(r,r')\,u(r')\,dr'+$$

$$+\frac{1}{r}\int_0^\infty K_{12}(r,r')\,ar'dr', \qquad (5.8)$$

где $\Omega(r)=\sqrt{\frac{4\pi e^2 n_2^{(0)}}{M}}$ — ленгмюровская частота ионов, а функции $L_{ik}(r)$ и ядра $K_{ik}(r,r')$ равны

$$L_{11}=-\frac{4\pi e^2}{rmc^3}\int\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\frac{\varepsilon-eu}{u_r}d\tau; \qquad L_{12}=-\frac{4\pi e^2}{rmc^4}\int\frac{\partial f_0}{\partial p_z}\frac{\varepsilon-eu}{u_r}d\tau;$$

$$L_{21}=-\frac{4\pi e^2}{rmc^2}\int\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\frac{p_z-\frac{e}{c}A}{u_r}d\tau; \qquad L_{22}=-\frac{4\pi e^2}{rmc^3}\int\frac{\partial f_0}{\partial p_z}\frac{p_z-\frac{e}{c}A}{u_r}d\tau;$$

$$K_{11}(r,r')=\frac{4\pi e^2}{m^2c^6}\int\frac{(\varepsilon-eu)(\varepsilon-eu')}{u_r u_r'}Id\tau;$$

$$K_{22}(r,r')=-\frac{4\pi e^2}{m^2c^4}\int\frac{\left(p_z-\frac{e}{c}A\right)\left(p_z-\frac{e}{c}A'\right)}{u_r u_r'}Id\tau;$$

$$K_{21}(r,r')=-K_{12}(r,r')=\frac{4\pi e^2}{m^2c^5}\int\frac{(\varepsilon-eu')\left(p_z-\frac{e}{c}A\right)}{u_r u_r'}Id\tau, \qquad (5.9)$$

где

$$I=\frac{\omega\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}+k\frac{\partial f_0}{\partial p_z}}{\omega_0 T_0-ckT_1}; \qquad d\tau=d\varepsilon dp_\varphi dp_z.$$

Пределы интегрирования определяются условием действительности u_r и u_r'

$$u_r=\frac{1}{mc}\sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon-eu)^2-\frac{p_\varphi^2}{r^2}-\left(p_z-\frac{e}{c}A\right)^2-m^2c^2};$$

$$u_r'=\frac{1}{mc}\sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon-eu')^2-\frac{p_\varphi^2}{r'^2}-\left(p_z-\frac{e}{c}A'\right)^2-m^2c^2}.$$

Уравнения (5. 8) представляют собой систему обыкновенных интегродифференциальных уравнений. Напомним, что

исходные кинетические уравнения для ионов и электронов и уравнения Максвелла представляют собой систему интегродифференциальных уравнений в частных производных от четырех переменных, не считая трех переменных φ, z и t, которые исключаются сразу.

В отличие от первоначальных уравнений, система (5. 8) допускает по крайней мере возможность численного решения и исследования. В некоторых частных случаях это исследование может оказаться довольно простым.

§ 6. Исследование собственных колебаний пучка при специально выбранной начальной функции распределения

Уравнения собственных колебаний пучка являются системой интегродифференциальных уравнений, решение которой при произвольной функции распределения f_0 весьма затруднительно.

Ниже рассмотрим определенный вид функции распределения, при котором система интегродифференциальных уравнений превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наличие интегрального члена обусловлено тем, что, вследствие большой частоты невозмущенного движения электронов по сравнению с частотами самосогласованных колебаний, их взаимодействие усредняется по орбите электронов. Так как амплитуды потенциалов a_i зависят только от радиуса, то естественно ожидать, что интегральный член резко упростится, если радиальная скорость электронов равна нулю.

При таком выборе распределения электронов по скоростям система (5. 8) уже превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, однако коэффициенты содержат весьма сложные квадратуры. Для упрощения последних сделаем еще два следующих предложения:

1) невозмущенные продольные скорости всех электронов одинаковы ($v_z = v_0$);

2) невозмущенные плотности электронов и ионов равны между собой, постоянны по сечению вплоть до некоторого радиуса r^* и равны нулю при больших радиусах.

Этим определяется вид невозмущенных потенциалов

$$U(r) = 0; \qquad A(r) = -\pi e n_0 \frac{v_0}{c} r^2. \tag{6. 1}$$

Выбранными условиями, совместно с уравнениями механики, полностью определяется невозмущенная функция распределения. Как легко видеть, уравнения механики на каждом

радиусе допускают определенную скорость, при которой центробежная сила уравновешивается магнитным стягиванием.

Таким образом, будем рассматривать незаряженный пучок постоянной плотности, в котором электроны движутся по цилиндрическим спиралям с одинаковой продольной скоростью. Несмотря на специальный характер выбранного распределения, изучение колебаний в этом случае представляет большой интерес, во-первых, потому, что многие существенные черты самосогласованных колебаний слабо зависят от вида распределения; во-вторых, поскольку вопрос касается устойчивости, следует ожидать, что выбранное нами распределение, обладающее дополнительной упорядоченностью по сравнению с истинным (т. е. меньшей величиной энтропии), по крайней мере не более устойчиво, чем истинное. Вследствие этого естественно ожидать, что область устойчивости пучка в действительности не у́же, чем в выбранном нами специальном случае.

В дальнейших вычислениях положено $m=1$, $c=1$, $r^*=1$, и введена постоянная

$$\nu = \pi \frac{e^2}{mc^2} n_0 r^{*2}.$$

Так как невозмущенные потенциалы зависят только от радиуса, то условиями движения электрона на постоянном радиусе являются

$$u_r = 0; \qquad \frac{du_r}{dt} = 0$$

в произвольный момент времени. Так как u_r задана как функция радиуса, то второе условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{du_r}{dt} = u_r \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{2} \frac{du_r^2}{dr} = 0.$$

Таким образом, получаем следующие условия:

$$u_r^2 = \varepsilon^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - (p_z + \nu v_0 r^2)^2 = 0; \tag{6.2}$$

$$\frac{du_r^2}{dr} = 2\frac{p_\varphi^2}{r^3} - 4\nu v_0 r\,(p_z + \nu v_0 r^2) = 0\ *. \tag{6.3}$$

* Нетрудно видеть, что (6.3) представляет собой условие равенства центробежной силы и силы магнитного стягивания

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = H_\varphi v_z.$$

Одно условие (6.2) при заданных импульсах определяет два значения r, при которых радиальная скорость обращается в нуль ($r_1 = r_{\text{мин}}$; $r_2 = r_{\text{макс}}$); (6.3) есть условие совпадения минимального и максимального радиуса.

Условие постоянства продольной скорости имеет следующий вид:

$$v_z = \frac{p_z + \nu v_0 r^2}{\varepsilon} = v_0. \tag{6.4}$$

После исключения r из (6.2—6.4) остаются два соотношения между обобщенными импульсами

$$p_z = p_z^0(\varepsilon); \quad p_\varphi = \pm p_\varphi^0(\varepsilon),$$

где

$$p_z^0(\varepsilon) = v_0\varepsilon - \frac{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}{2v_0\varepsilon} = v_0\varepsilon - \nu v_0 r_0^2(\varepsilon); \tag{6.5}$$

$$p_\varphi^0(\varepsilon) = \frac{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}{\sqrt{2\nu v_0^2 \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}\, r_0(\varepsilon); \tag{6.6}$$

$$\gamma_0 = (1 - v_0^2)^{-1/2}; \quad r_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}{2\nu v_0^2 \varepsilon}}. \tag{6.7}$$

Таким образом, функция распределения имеет следующий вид:

$$f_0(\varepsilon;\ p_\varphi;\ p_z) = F(\varepsilon)\,\delta(p_z - p_z^0)\,\frac{\delta(p_\varphi - p_\varphi^0) + \delta(p_\varphi + p_\varphi^0)^*}{2}. \tag{6.8}$$

Вид функции $F(\varepsilon)$ определяется условием постоянства плотности электронов.

В общем случае плотность выражается через функцию распределения следующим образом:

$$n^{(0)} = \frac{1}{r}\int f_0 \frac{\varepsilon - eu}{u_r}\, dp_\varphi dp_z d\varepsilon. \tag{6.9}$$

---

* Полусумма δ-функций от p_φ выбрана с тем, чтобы не было тока по φ. Это означает, что половина электронов вращается в одном направлении, половина — в другом.

Интегрирование производится по области действительности u_r, которая ограничена положительной полостью эллиптического гиперболоида (рис. 1)

$$(\varepsilon - eu)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A\right)^2 = 1.$$

Казалось бы, что наличие δ-функций в f_0 позволяет легко провести интегрирование в (6.9) по p_φ и p_z; однако подста-

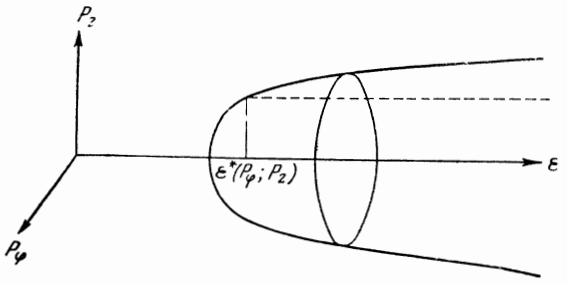


Рис. 1.

новка (6.8) в (6.9) и интегрирование по p_φ и p_z в необходимых пределах приводит к тому, что интеграл по ε имеет формально расходящийся вид и остается конечным только вследствие того, что область интегрирования по ε обращается при этом в нуль. Раскрытие этой неопределенности путем перехода к пределу в конечном результате влечет за собой очень громоздкие выкладки.

Эти трудности можно обойти, воспользовавшись следующим приемом (который будем неоднократно применять в дальнейшем).

Интеграл по указанной области можно записать в следующем виде, если первое интегрирование проводить по ε:

$$\int f_0 \frac{\varepsilon - eu}{u_r} d\varepsilon dp_\varphi dp_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_z \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_\varphi \int\limits_{\varepsilon^*(p_\varphi;\, p_z)}^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon - eu}{u_r} f_0, \quad (6.10)$$

где

$$\varepsilon^*(p_\varphi;\, p_z) = \sqrt{1 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2} + eu. \quad (6.11)$$

Будем рассматривать ε как комплексную переменную. Так как $\varepsilon = \varepsilon^*$ является точкой ветвления подынтегральной

функции ($u_r(\varepsilon^*)=0$), то, как нетрудно видеть, интеграл по ε от ε^* до ε равен с обратным знаком половине интеграла по контуру $L(p_\varphi;\ p_z)$, показанному на рис. 2.

Если, кроме того, $f_0(\varepsilon;\ p_\varphi;\ p_z)$ не имеет особенностей по ε на действительной оси по крайней мере от $1+eu$ до ∞, то контур $L(p_\varphi;\ p_z)$ можно заменить контуром L, охватывающим точку $\varepsilon=1+eu$, причем это можно сделать для любых значений p_φ и p_z, так как $\varepsilon^*(p_\varphi;\ p_z)$ никогда не бывает левее точки $1+eu$, как это следует из (6.11). Теперь контур инте-

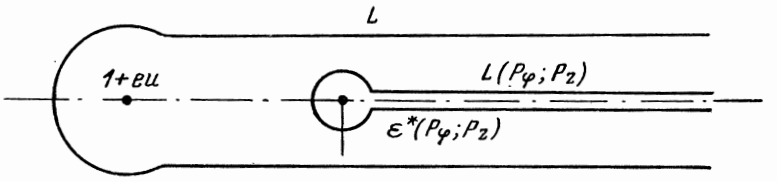


Рис. 2.

грирования по ε уже не зависит от p_φ и p_z, и весь интеграл превращается в трехкратный интеграл с независимыми пределами интегрирования. Но тогда можно менять порядок интегрирования без изменения пределов.

Таким образом, получаем после подстановки (6.8) в (6.9)

$$n_0=-\frac{1}{2r}\int\limits_L F(\varepsilon)\,\varepsilon d\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left[p_z-p_z^0(\varepsilon)\right]dp_z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\left[p_\varphi-p_\varphi^0(\varepsilon)\right]+\delta\left[p_\varphi+p_\varphi^0(\varepsilon)\right]}{2u_r(\varepsilon;\ p_\varphi;\ p_z)}dp_\varphi.$$

Интегрируя по p_φ и p_z и используя выражение

$$u_r[\varepsilon;\ p_z^0(\varepsilon);\ p_\varphi(\varepsilon);\ r]=i\left[\varepsilon-\varepsilon_0(r)\right]\chi(\varepsilon;\ r), \qquad (6.12)$$

где введена функция $\varepsilon_0(r)$, обратная $r_0(\varepsilon)$ [см. (6.7)],

$$\varepsilon_0(r)=\gamma_0\left[\nu v_0^2\gamma_0 r^2+\sqrt{1+\nu^2v_0^4\gamma_0^2r^4}\right], \qquad (6.13)$$

а

$$\chi(\varepsilon;\ r)=\frac{\sqrt{r^2+\frac{2\varepsilon}{\nu}}}{2v_0\gamma_0^2\varepsilon r}\cdot\frac{\varepsilon_0^2+\gamma_0^2}{\varepsilon_0}, \qquad (6.14)$$

получаем

$$n_0 = -\frac{1}{2ir}\int\limits_L \frac{F(\varepsilon)\,\varepsilon d\varepsilon}{[\varepsilon - \varepsilon_0(r)]\,\chi(\varepsilon;\ r)}\ *. \qquad (6.15)$$

Оставшийся интеграл по контуру L сводится к вычету в точке $\varepsilon_0(z) = \varepsilon$

$$n_0 = -\frac{\pi\varepsilon_0 F(\varepsilon_0)}{r\chi(\varepsilon_0;\ r)}.$$

Рассматривая здесь r как функцию ε_0; $r = r_0(\varepsilon_0)$, получим выражение для $F(\varepsilon)$

$$F(\varepsilon) = -\frac{n_0[r_0(\varepsilon)]\,r_0(\varepsilon)\cdot\chi[\varepsilon;\ r_0(\varepsilon)]}{\pi\varepsilon}. \qquad (6.16)$$

Считая n_0 постоянной вплоть до r^*, получим из (6.8) и (6.16) функцию распределения, удовлетворяющую всем поставленным условиям

$$f_0(\varepsilon,\ p_\varphi,\ p_z) = -\frac{n_0}{2\pi v_0\gamma_0^2}\,\frac{\varepsilon^2+\gamma_0^2}{\varepsilon^3}\sqrt{\frac{(3v_0^2+1)\varepsilon^2-1}{2v_0^2\varepsilon}}\times$$

$$\times\,\delta\left[p_z - v_0\varepsilon + \frac{(1-v_0^2)\varepsilon^2-1}{2v_0\varepsilon}\right]\times$$

$$\times\,\frac{\delta\left[p_\varphi - \frac{(1-v_0^2)\varepsilon^2-1}{\sqrt{2v_0^2\varepsilon}}\right] + \delta\left[p_\varphi + \frac{(1-v_0^2)\varepsilon^2-1}{\sqrt{2v_0^2\varepsilon}}\right]}{2}. \qquad (6.17)$$

Как видно из этого выражения, $f_0(\varepsilon;\ p_\varphi;\ p_z)$ не имеет особенностей по ε на действительной оси правее $\varepsilon = 1$, что и было предположено при выводе **.

Для дальнейшего заметим, кроме того, что при наличии δ-функции от $p_\varphi \pm p_\varphi^0$ и $p_z - p_z^0$ область интегрирования фактически представляет собой линию, лежащую на поверхности

---

* Из (6.15) непосредственно видно, что при интегрировании по действительной оси интеграл формально расходится, о чем упоминалось на стр. 314.

** Следует иметь в виду, что, несмотря на особый характер δ-функции, ее всегда можно выбрать как предел функции, не имеющей особенности в конечной части плоскости, например

$$\delta(x) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{\tau}}.$$

гиперболоида, и поэтому можно не следить за особенностями подынтегрального выражения, лежащими между поверхностью гиперболоида и плоскостью $\varepsilon = 1$.

Непосредственное применение формулы (3.12), содержащей производные от f_0, в данном случае неудобно из-за наличия в f_0 δ-функций. Мы по-прежнему будем интегрировать по p_φ и p_z от $-\infty$ до $+\infty$, а по ε — по контуру L (рис. 2), при этом уже не надо следить за особыми точками подынтегральной функции, лежащими между поверхностью эллиптического гиперболоида (рис. 1) и плоскостью $\varepsilon = 1$.

Интегрируя в (3.12) по частям (при этом можно не обращать внимания на появление расходящихся выражений на поверхности гиперболоида, ибо контур интегрирования не проходит теперь через особые точки), получаем

$$j_i^{(1)} = \frac{e}{2r}\int f_0 d\tau \frac{1}{u_r}\left(a_i - \frac{\langle\tau_e a_e\rangle}{\langle\tau_e k_e\rangle} k_i\right) + \frac{e}{2r}\int d\tau \frac{f_0}{u_r}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)\left(P_k - \frac{e}{c}A_k\right)\times$$

$$\times \left(a_k - \frac{\langle\tau_e a_e\rangle k_k}{\langle\tau_e k_e\rangle}\right) - \frac{e}{2r}\int d\tau \frac{f_0}{u_r}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right) k_k \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\langle\tau_e a_e\rangle}{\langle\tau_e k_e\rangle}. \quad (6.18)$$

Подставляя выражение (6.8), интегрируя по p_φ и p_z, получим с учетом (6.12)

$$j_i^{(1)} = \frac{e}{2ri}\int\limits_L d\varepsilon \frac{F}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\chi(\varepsilon; r)}(a_i - S^0 k_i)\int\limits_L d\varepsilon \frac{F c_i c_k (a_k - S^0 k_k)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^3 \chi^3(\varepsilon; r)} -$$

$$- \frac{e}{2ri}\int\limits_L d\varepsilon \frac{F c_i k_k R_k}{(\varepsilon - \varepsilon_0)\chi(\varepsilon; r)}, \quad (6.19)$$

где введены следующие обозначения:

$$S^0 \equiv S^0(\varepsilon) = \left[\frac{\langle\tau_e a_e\rangle}{\langle\tau_e k_e\rangle}\right]_{\substack{p_\varphi = p_\varphi^0 \\ p_z = p_z^0}}; \quad (6.20)$$

$$R_k \equiv R_k(\varepsilon) = \left[\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\langle\tau_e a_e\rangle}{\langle\tau_e k_e\rangle}\right]_{\substack{p_\varphi = p_\varphi^0 \\ p_z = p_z^0}}; \quad (6.21)$$

$$c_i \equiv c_i(\varepsilon; r) = \left[p_i - \frac{e}{c}A_i(r)\right]_{p_z = p_z^0}. \quad (6.22)$$

Интегрирование в (6.19) сводится к вычетам в точке $\varepsilon = \varepsilon_{0r}$ в результате чего придем к следующему результату:

$$j_i^{(1)} = \frac{\pi e}{r} \frac{F(\varepsilon_0)}{\chi(\varepsilon_0; r)} \left[a_i(r) - S^0(\varepsilon_0) k_i \right] -$$

$$- \frac{\pi e}{2r} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \frac{F(\varepsilon) c_i(\varepsilon; r) [a_k(r) - S^0(\varepsilon) k_k]}{\chi^3(\varepsilon; r)} \right\}_{\varepsilon = \varepsilon_0} -$$

$$- \frac{\pi e}{r} \frac{F(\varepsilon_0)}{\chi(\varepsilon_0; r)} c_i(\varepsilon_0; r) k_k R_k(\varepsilon_0). \qquad (6.23)$$

Нам остается еще получить явное выражение для функций $S^0(\varepsilon)$ и $R_k(\varepsilon)$.

По определению операции $\langle \tau_\varepsilon \ldots \rangle$ интеграл в (3.5) берется между корнями $u_r(p_i; r')$. При $p_\varphi^2 = p_\varphi^{02}(\varepsilon)$ и $p_z = p_z^0(\varepsilon)$ u_r содержит полный квадрат $[r - r_0(\varepsilon)]^2$, так что интеграл формально расходится, правда, при этом пределы интегрирования сливаются (картина, аналогичная рассмотренной выше при интегрировании по ε, p_φ, p_z). Кроме того, даже при произвольных p_φ и p_z дифференцирование $\langle \tau_\varepsilon \ldots \rangle$ по ε и p_z невозможно провести в явном виде до взятия интеграла, если он представлен в форме (3.5), из-за появляющихся расходимостей.

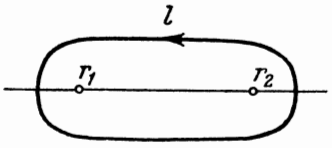


Рис. 3.

Всех этих трудностей можно избежать, если рассматривать r как комплексную переменную. Так как $r = r_1$ и $r = r_2$ являются точками ветвления, то интеграл от r_1 до r_2 можно заменить интегралом по замкнутому контуру l, показанному на рис. 3.

Тогда для $\langle \tau_i L \rangle$ получим

$$\langle \tau_i L \rangle = \oint \frac{p_i - \frac{e}{c} A_i(r')}{u_r'} L(r') \, dr'. \qquad (6.24)$$

В этом выражении, в отличие от (3.5), при взятии производных по p_i достаточно дифференцировать подынтегральное выражение, не обращая внимания на высокие степени u_r в знаменателе, так как контур не проходит через особые точки.

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \langle \tau_k L \rangle = - \oint \frac{\delta_{ik} L}{u_r} dr - \oint \frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)\left(p_k - \frac{e}{c} A_k\right)}{u_r^3} L dr \qquad (6.25)$$

(использовано выражение для u_r в виде $u_r^2 = -1 - (p_i - eA_i)^2$). При $p_\varphi = p_\varphi^0(\varepsilon)$ и $p_z = p_z^0(\varepsilon)$ можно записать

$$u_r = -i\,[r - r_0(\varepsilon)]\,\psi(\varepsilon;\ r), \tag{6.26}$$

где

$$\psi(\varepsilon;\ r) = \frac{\sqrt{2}v_0\,[r_0(\varepsilon) + r]}{r_0}\sqrt{r^2 + \frac{2\varepsilon}{v}} \tag{6.27}$$

(это выражение отличается от (6.12) тем, что здесь явно выделен множитель $r - r_0(\varepsilon)$, тогда как в (6.12) $\varepsilon - \varepsilon_0(r)$).

Как видно из (6.26), в данном случае обе точки ветвления сливаются в один полюс, и интеграл по замкнутому контуру сводится к вычету в этом полюсе.

Таким образом,

$$\langle \tau_i L\rangle\Big|_{\substack{p_\varphi = p_\varphi^0 \\ p_z = p_z^0}} = 2\pi\,\frac{c_i\,[\varepsilon;\ r_0(\varepsilon)]\,L\,[r_0(\varepsilon)]}{\psi\,[\varepsilon;\ r_0(\varepsilon)]};$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\langle \tau_i L\rangle\Big|_{\substack{p_\varphi = p_\varphi^0 \\ p_z = p_z^0}} = 2\pi\,\frac{\delta_{ik}\,L(r_0)}{\psi(\varepsilon;\ r_0)} - \pi\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,\frac{c_i(\varepsilon;\ r)\,c_k(\varepsilon;\ r)\,L(r)}{\psi^3(\varepsilon;\ r)}\right]_{r=r_0(\varepsilon)}.$$

В результате для интересующих нас величин, после небольших вычислений, найдем

$$S^0 = S(\varepsilon;\ r_0) \equiv \frac{c_i(\varepsilon;\ r_0)\,a_i(r_0)}{c_k(\varepsilon;\ r_0)\,k_k}; \tag{6.28}$$

$$k_k R_k = \left[\frac{k_k}{c_i k_i}(a_k - S^0 k_k) - \frac{1}{2\psi^2}\left\{(c_i a_i)'' - S^0(c_i k_i)'' + 2\,\frac{(c_i k_i)'}{c_k k_k}\left[(c_i a_i)' - S^0(c_k a_k)' - 6\,\frac{\partial \ln\psi}{\partial r}\,[(c_i a_i)' - S^0(c_i k_i)']\right\}\right]_{r=r_0(\varepsilon)}. \tag{6.29}$$

(штрихами обозначено дифференцирование по r).

Перейдем к вычислению второго члена в (6.23). Для упрощения выкладок запишем его в следующем виде:

$$J_i = \left[\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\,\frac{F}{\chi^3}\,c_i c_k k_k\,(S(\varepsilon;\ r) - S(\varepsilon;\ r_0))\right]_{\varepsilon=\varepsilon_0}, \tag{6.30}$$

где использовано обозначение (6.28) для $S(\varepsilon;\ r)$.

Так как множитель $S(\varepsilon;\ r) - S(\varepsilon_i r_0)$ обращается в нуль при $\varepsilon = \varepsilon_0$, то в J_i дают вклад только члены с производными от этого множителя. Далее заметим, что зависимость от ε содер-

жится в $S(\varepsilon; r_0)$ как явно (первый аргумент), так и через $r_0(\varepsilon)$. Производные только по первому аргументу сократятся с равными им производными от $S(\varepsilon; r)$.

Принимая во внимание эти замечания, после несложных вычислений, получим

$$J_i = -\frac{Fc_i}{\chi^3}\rho^2[(c_k a_k)'' - S(c_k k_k)''] - \frac{F}{\chi^3}[(c_k a_k)' - S(c_k k_k)'] \times$$
$$\times\left[2\rho c_i \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\frac{F}{\chi^3} - 2\rho^2 c_i \frac{(c_k k_k)'}{c_m k_m} + \rho' c_i + 2\rho\frac{\partial c_i}{\partial\varepsilon}\right] -$$
$$- 2c_i\frac{(c_k k_k)'}{c_m k_m}\frac{\partial c_e}{\partial\varepsilon}(a_e - Sk_e) - 2\frac{Fc_i}{\chi^3}\rho\frac{\partial c_k}{\partial\varepsilon}a'_k, \qquad (6.31)$$

где введены обозначения $\rho = \frac{dr}{d\varepsilon_0}$; $\rho' = \frac{d^2 r}{d\varepsilon_0^2}$.

В (6.31), после указанного дифференцирования по r и ε, надо положить везде $\varepsilon = \varepsilon_0(r)$. Нам остается теперь подставить (6.29) и (6.31) в выражение (6.23) и привести подобные члены. При этом необходимо иметь в виду, что величины ψ, χ и ρ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ связаны соотношением

$$\left[\frac{\psi(\varepsilon; r)\rho(r)}{\chi(\varepsilon; r)}\right]'_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 1, \qquad (6.32)$$

что можно проверить непосредственным вычислением, но проще воспользоваться определением ψ и χ в (6.12) и (6.26)

$$\left[\frac{\chi(\varepsilon; r)}{\psi(\varepsilon; r)}\right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \left[\frac{r - r_0}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right]_{\varepsilon\to\varepsilon_0} = \left[\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \rho.$$

После проведения указанных операций получим

$$\frac{\varepsilon_0}{en_0} j_i^{(1)} = -(a_i - Sk_i) + \frac{c_i k_k}{c_m k_m}(a_k - Sk_k) +$$
$$+\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{c_i\varkappa}{2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial c_i}{\partial\varepsilon}\right)[(c_k a_k)' - S(c_k k_k)'] - \frac{c_i}{\psi^2}[(c_k a_k)'' - S(c_k k_k)''] +$$
$$+\frac{c_i}{\rho\psi^2}\frac{(c_m k_m)'}{c_e k_e}\frac{\partial c_k}{\partial\varepsilon}(a_k - Sk_k) - \frac{c_i}{\rho\psi^2}\frac{\partial c_k}{\partial\varepsilon}a'_k, \qquad (6.33)$$

где введено обозначение

$$\varkappa = \varkappa(r) = \left[6\frac{\partial\ln\psi}{\partial r} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln\frac{F}{\chi^3} - \frac{\rho'}{\rho^2}\right]_{\varepsilon=\varepsilon_0(r)} \qquad (6.34)$$

(все функции энергии в (6.33) берутся при $\varepsilon = \varepsilon_0(r)$).

Заметим, что в $\varkappa$ входит производная от $F(\varepsilon)$ функции, разрывной при $\varepsilon = \varepsilon_0(1)$, так как плотность n_0 обрывается

при $r=1$. Вследствие этого $\varkappa(r)$ содержит δ-функцию от $\varepsilon_0(r)-\varepsilon_0(1)$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln F\Big|_{\varepsilon_0}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln F\Big|_{\varepsilon\neq\varepsilon_0(1)}-\delta[\varepsilon_0(r)-\varepsilon_0(1)]=\frac{\partial\ln F}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon\neq\varepsilon_0(1)}-\rho\delta(r-1),$$

и, следовательно, для $\varkappa(r)$ можно написать

$$\varkappa(r)=\varkappa_0(r)+2\delta(r-1), \tag{6.35}$$

где $\varkappa_0(r)$ определяется выражением (6.34) при $\varepsilon\neq\varepsilon_0(1)$.

Члены с δ-функциями от $(r-1)$ представляют собой поверхностные плотности и ток на границе. В действительности, конечно, никаких поверхностных плотности и тока нет. Их появление в формулах связано с тем, что мы считали границу пучка неподвижной, в то время как в действительности она колеблется. Представим себе, что граница сместилась на некоторую величину Δr, тогда в области шириной Δr изменение плотности стало порядка самой плотности n_0. Можем по-прежнему считать границу пучка неизменной, но для получения правильного выражения для поля вне пучка нужно добавить в виде поверхностных ток и плотность, вышедшие за границу. Несмотря на малость смещения границы, из-за резкого обрыва пучка поверхностные плотности и ток оказываются того же порядка, что и объемные, и обязательно должны учитываться.

Величины ρ, ψ^2, $\varkappa$, c_i и их производные, входящие в (6.33), имеют следующий вид (при $\varepsilon=\varepsilon_0(r)$):

$$\begin{aligned}
&c_1=v_0\varepsilon_0; && c_4=i\varepsilon_0;\\
&\frac{\partial c_1}{\partial\varepsilon}=v_0-2\nu v_0\rho^2; && \frac{\partial c_4}{\partial\varepsilon}=1;\\
&\frac{\partial c_1}{\partial r}=2\nu v_0\rho; && \frac{\partial c_4}{\partial r}=0;\\
&\psi^2=4\nu v_0^2(2+\alpha); && \rho=(2\nu v_0^2\varepsilon_0^2\mu r)^{-1};\\
&&& \varkappa_0^2=\frac{1}{r}\left(6-4\mu\,\frac{4+\alpha}{2+\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{6.36}$$

где введены обозначения

$$\alpha=\frac{\nu r^2}{\varepsilon_0(r)}\ ;\quad \mu=\frac{2\gamma_0^2}{\varepsilon_0^2+\gamma_0^2}\ . \tag{6.37}$$

Подставляя (6.36) в (6.33), получим окончательно для $j_i^{(1)}$ следующее выражение:

$$\frac{\varepsilon_0}{en_0} j_i^{(1)} = -\left(a_i - \frac{u - av_0}{\omega - kv_0} k_i\right)\left\{\frac{c_i}{\varepsilon_0}\frac{k - \omega v_0}{\omega - kv_0} + \frac{2\mu c_i}{v_0\varepsilon_0 (2+\alpha)^2} - \right.$$
$$- \frac{\alpha}{2+\alpha}\frac{1}{\omega - kv_0}\left[(\omega - kv_0)\,\delta_{i1} + \frac{c_i}{\varepsilon_0} k\right]\Bigg\}\frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} +$$
$$+ \frac{c_i}{4\nu v_0^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{2+\alpha}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right) - \right. \qquad (6.38)$$
$$\left. - \frac{\alpha\varepsilon_0\delta_{i1}}{2\nu v_0 (2+\alpha)\, r}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right) + \frac{\varepsilon_0}{en_0} i_i^{(1)}\delta(r-1),\right.$$

или в компонентах

$$\frac{\varepsilon_0}{en_0} j_z^{(1)} = -\left[\frac{\omega}{\gamma_0^2(\omega - kv_0)} - \frac{\alpha\omega}{(2+\alpha)(\omega - kv_0)} + \frac{2\mu}{(2+\alpha)^2}\right]\frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} +$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{4\nu v_0}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{2+\alpha}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right)\right] -$$
$$- \frac{\alpha\varepsilon_0}{2\nu v_0 (2+\alpha)^2}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right) + \frac{\varepsilon_0}{en_0} i_i^{(1)}\delta(r-1); \qquad (6.39)$$

$$\frac{\varepsilon_0 v_0}{en_0} n^{(1)} = -\left[\frac{k\dot{v}_0}{\gamma_0^2(\omega - kv_0)} - \frac{\alpha k v_0}{(2+\alpha)(\omega - kv_0)} + \frac{2\mu}{(2+\alpha)^2}\right]\frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} +$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{4\nu v_0}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{2+\alpha}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right)\right] + \frac{\varepsilon_0 v_0}{en_0}\sigma^{(1)}\delta(r-1), \qquad (6.40)$$

где $\sigma^{(1)}$ и $i^{(1)}$ — поверхностные плотность и ток — равны:

$$\frac{\varepsilon_0}{en_0} i^{(1)} = \frac{\varepsilon_0 v_0}{en_0}\sigma^{(1)} = \frac{1}{2(2+\alpha)}\left[\frac{a\omega - ku}{\omega - kv_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon_0}{2\nu v_0}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right)\right]. \qquad (6.41)$$

Таким образом, получим плотность и ток в виде линейных функций потенциалов a и u и их производных с коэффициентами, представляющими собой некоторые функции радиуса r. Подставляя эти выражения в (5.7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для самосогласованных полей.

δ-Функции, входящие в плотность и ток, будут определять граничные условия. Однако коэффициенты при потен-

циалах в (6.39) и (6.40) еще настолько сложны, что уравнения (5.7) не могут быть решены в известных функциях, и поэтому их исследование в общем виде может быть проведено только численно. В некоторых предельных случаях коэффициенты упрощаются настолько, что уравнение (5.7) удается решить и исследовать аналитически.

§ 7. Дисперсионное уравнение в случае $\nu\gamma_0 \ll 1$

Задача о собственных колебаниях пучка характеризуется двумя параметрами ν и γ_0. Рассмотрим частный случай соотношения между параметрами, а именно: $\nu\gamma_0 \ll 1$, когда уравнения (6.39) и (6.40) особо упрощаются.

В этом предельном случае величины ε_0, α и μ, входящие в (6.39) и (6.40), имеют следующий вид:

$$\varepsilon_0 \simeq \gamma_0; \quad \alpha = \frac{\nu r^2}{\gamma_0} \ll 1; \quad \mu \simeq 1.$$

При этом выражения для тока и плотности заметно упрощаются

$$4\pi e j_z^{(1)} = \frac{1}{2v_0 r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right)\right] - \\ - \frac{2\nu}{\gamma_0}\frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0}\left[1 + \frac{2\omega}{\gamma_0^2(\omega - kv_0)}\right]; \tag{7.1}$$

$$4\pi e v_0 n^{(1)} = \frac{1}{2v_0 r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right)\right] - \\ - \frac{2\nu}{\gamma_0}\frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0}\left[1 + \frac{2kv_0}{\gamma_0^2(\omega - kv_0)}\right]; \tag{7.2}$$

$$4\pi e i^{(1)} = 4\pi e v_0 \sigma^{(1)} = -\frac{1}{2v_0}\left(\frac{du}{dr} - v_0\frac{da}{dr}\right) + \frac{\nu}{\gamma_0}\frac{a\omega - ku}{\omega - kv_0}. \tag{7.3}$$

Подставляя (7.1) и (7.2) в (5.7), получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно a и u. Удобнее, однако, перейти к уравнениям для полей. Замечая, что в нашем случае

$$a\omega - ku = iE_z; \quad \frac{du}{dr} = -E_r; \quad \frac{da}{dr} = -H, \tag{7.4}$$

получим вместо (5.7) следующую систему:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH) - i\omega\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)E_z = 4\pi e j_z^{(1)};$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rE_r\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\right] - ik\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)E_z = 4\pi e n^{(1)};\ r<1; \quad (7.5)$$

$$i\frac{dE_z}{dr} = -\omega H + kE_r.$$

В области $r>1$ имеем обычную систему уравнений Максвелла в пустоте

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH) - i\omega E_z = 0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) - ikE_z = 0; \quad (7.6)$$

$$i\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\omega H + kE_r.$$

Граничные условия при $r=1$ имеют следующий вид:

$$E_r'' - \left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)E_2' = 4\pi e\sigma^{(1)};$$

$$H'' - H' = 4\pi e i^{(1)}; \quad (7.7)$$

$$E_z'' = E_z' = 0,$$

где $\sigma^{(1)}$ и $i^{(1)}$ даются формулой (7.3) (величины с одним штрихом относятся к внутренней области, с двумя штрихами — к внешней).

Уравнения (7.5) с учетом выражений для $j_z^{(1)}$ и $n^{(1)}$ можно записать в виде

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(rH) + \frac{1}{2v_0 r}\frac{d}{dr}(rE_r) + (p+q\omega)\,iE_z = 0;$$

$$-\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(rH) + \left[\frac{1}{2v_0} + v_0\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\right]\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r) +$$

$$+ (p+qkv_0)\,iE_z = 0; \quad (7.8)$$

$$i\frac{dE_z}{dr} = -\omega H + kE_r,$$

где

$$p = \frac{2\nu}{\gamma_0(\omega - kv_0)}; \quad q = \frac{4\nu}{\gamma_0^3(\omega-kv_0)^2} - \left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right). \quad (7.9)$$

Из первых двух уравнений в (7.9) можно выразить $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH)$ и $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r)$ через E_z, после чего, применяя операцию $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r$ к третьему уравнению и заменяя $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH)$ и $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r)$ на их выражения через E_z, получим одно уравнение 2-го порядка относительно E_z

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right)+\eta^2 E_z=0, \tag{7.10}$$

где

$$\eta^2=\frac{1}{1+v_0^2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)}\left\{q(\omega-kv_0)^2+\right.$$
$$\left.+2(p+q\omega)\left[kv_0-\omega v_0^2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\right]\right\}. \tag{7.11}$$

В области $r>1$ аналогичным путем придем к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right)-(k^2-\omega^2)E_z=0. \tag{7.12}$$

На границе $r=1$ E_z должно быть непрерывно. Граничные условия для $\frac{dE_z}{dr}$ получим из третьего уравнения в (7.5) и (7.6), из которого следует

$$i\left(\frac{dE_z''}{dr}-\frac{dE_z'}{dr}\right)=-\omega(H''-H')+k(E_r''-E_r'),$$

что с учетом (7.7) и (7.3) можно привести к виду

$$\frac{dE_z''}{dr}=\frac{qv_0(k^2-\omega^2)+p(k-\omega v_0)}{v_0\gamma_1^2}\frac{dE_z'}{dr}+\frac{\nu(k-\omega v_0)}{v_0\gamma_0(\omega-kv_0)}E_z'. \tag{7.13}$$

Мы будем рассматривать только случай $k^2-\omega^2>0$, в котором энергия электромагнитного поля вне пучка на единицу длины остается конечной, как бы ни был велик радиус трубы, в которой находится пучок, что даст возможность рассматривать бесконечную внешнюю область. При $k^2-\omega^2<0$ энергия поля растет с радиусом трубы до бесконечности, и поэтому задача принципиально зависит от проводимости и радиуса внешней трубы, даже при очень большом радиусе последней.

Решение уравнения (7.12), достаточно быстро убывающее на бесконечности, имеет вид

$$E_z(r) = c_1 K_0\left(\sqrt{k^2 - \omega^2}\, r\right), \tag{7.14}$$

где $K_0(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Ограниченным в нуле решением уравнения (7.10) является

$$E_z(r) = \mathcal{J}_0(\eta r). \tag{7.15}$$

Подставляя (7.14) и (7.15) в граничные условия $E''_z|_{r=1} = E'_z|_{r=1}$ и (7.13) и исключая постоянную c_1, получим

$$-\sqrt{k^2 - \omega^2}\,\frac{K_1\left(\sqrt{k^2 - \omega^2}\right)}{K_0\left(\sqrt{k^2 - \omega^2}\right)} =$$

$$= \frac{-qv_0(k^2 - \omega^2) + p(k - \omega v_0)}{v_0 \eta} \cdot \frac{\mathcal{J}_1(\eta)}{\mathcal{J}_0(\eta)} + \frac{\nu(k - \omega v_0)}{v_0 \gamma_0 (\omega - k v_0)}. \tag{7.16}$$

Так как для рассматриваемых колебаний всегда $|kr| \ll 1$ (что является условием адиабатичности колебаний по отношению к движению электронов), то в (7.16) можно разложить K_1 и K_0 и ограничиться первым членом разложения. В результате получим

$$\frac{qv_0(k^2 - \omega^2) + p(k - \omega v_0)}{\eta}\,\frac{\mathcal{J}_1(\eta)}{\mathcal{J}_0(\eta)} = \frac{\nu(k - \omega v_0)}{\gamma_0(\omega - k v_0)} + \frac{\nu}{L}, \tag{7.17}$$

где

$$L = \ln \frac{2}{C\sqrt{(k^2 - \omega^2)}};$$

$C = 0{,}577$ — постоянная Эйлера.

Подставляя выражения (7.9) для q и p и вводя фазовую скорость $v_\Phi = \frac{\omega}{k}$, получим окончательно

$$\left[\frac{4\nu v_0 (1 - v_\Phi)^2}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)^2} + \frac{2\nu(1 - v_0 v_\Phi)}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)} - \xi k^2 v_0^2 (1 - v_\Phi^2)\right]\frac{\mathcal{J}_1(\eta)}{\mathcal{J}_0(\eta)} =$$

$$= \frac{\nu}{L} + \frac{\nu(1 - v_\Phi v_0)}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)}, \tag{7.18}$$

где

$$\xi = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2}{k^2 v_\Phi^2} = 1 - \frac{4\nu}{M k^2 v_\Phi^2},$$

а выражение для η (7.11) можно представить в виде

$$\eta^2 = \frac{1}{1+\xi v_0^2}\left\{\frac{8\nu v_0 v_\Phi (1-\xi v_0 v_\Phi)}{\gamma_0^3 (v_\Phi - v_0)^2} - \frac{4\nu}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)}\left[v_\Phi (1+\xi v_0^2) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - v_0^2 (v_\Phi + v_0)\right] + \xi k^2 (v_\Phi - v_0)^2 - 2\xi k^2 v_0^2 (1 - \xi v_\Phi^2)\right\}. \quad (7.19)$$

Из выражения (7.19) видно, что везде, кроме узких областей вблизи $v_\Phi = v_0$ и $1 + \xi v_0^2 = 0$ $\left(\text{т. е. } \omega^2 = \Omega^2 \frac{v_0^2}{1+v_0^2}\right)$, выполняется соотношение $\eta \ll 1$.

Вблизи области $1 + \xi v_0^2 = 0$ выражение для η^2 имеет вид

$$\eta^2 = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{4\nu (v_\Phi + v_0)}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)^2}\left[2v_\Phi - v_0^2 (v_\Phi + v_0)\right] + \frac{k^2}{v_0^2}(v_0^2 + v_\Phi)^2\right\}, \quad (7.20)$$

где

$$\Delta = 1 + \xi v_0^2,$$

и, следовательно, условие $\eta \ll 1$ почти для всех v_Φ означает

$$\Delta \gg \frac{\nu}{\gamma_0}\ ;\ \Delta \gg k^2. \quad (7.21)$$

Вблизи области $v_\Phi = v_0$ имеем для η^2 выражение

$$\eta^2 = \frac{4\nu v_0^2 \sigma}{\delta^2 \gamma_0^5 \left(1 - \frac{\sigma}{2\gamma_0^2}\right)}, \quad (7.22)$$

где

$$\delta = v_\Phi - v_0;\ \sigma = 1 + \frac{\Omega^2 \gamma_0^2}{k^2} = 1 + \frac{4\nu\gamma_0^2}{Mk^2},$$

и условие $\eta \ll 1$ равносильно

$$\delta^2 = (v_\Phi - v_0)^2 \gg \frac{4\nu v_0^2 \sigma}{\gamma_0^5 \left(1 - \frac{\sigma}{2\gamma_0^2}\right)}. \quad (7.23)$$

Ограничиваясь областью, где выполняется условие $\eta \ll 1$, можно в (7.18) разложить $\frac{\mathscr{J}_1(\eta)}{\mathscr{J}_0(\eta)}$, в результате чего получим

$$\frac{4\nu(1-v_\Phi^2)}{\gamma_0^3(v_\Phi - v_0)^2} - \xi k^2(1-v_\Phi^2) = \frac{2}{L}, \qquad (7.24)$$

что после подстановки выражения для ξ можно записать в следующем виде:

$$\frac{2L\nu}{\gamma_0^3}\frac{1}{(v_\Phi - v_0)^2} + \frac{2L\nu}{M}\frac{1}{v_\Phi^2} = \frac{1}{1-v_\Phi^2} + \frac{Lk^2}{2}. \qquad (7.25)$$

Вторым членом в правой части можно пренебречь по сравнению с первым вследствие малости k ($kr \ll 1$), так что дисперсионное уравнение примет вид

$$\frac{2L\nu}{\gamma_0^3}\frac{1}{(v_\Phi - v_0)^2} + \frac{2L\nu}{M}\frac{1}{v_\Phi^2} = \frac{1}{1-v_\Phi^2}. \qquad (7.26)$$

Таким образом, в этом приближении фазовая скорость не зависит от волнового вектора k (не считая логарифмической зависимости через L), в отличие от обычной плазмы, где от k не зависит частота ω.

Это уравнение в точности совпадает с уравнением для продольных колебаний пучка, полученным в [1], в предположении, что частицы могут двигаться только вдоль пучка.

Напомним, что при выводе уравнения (7.26) было сделано предположение (7.23), исключающее значения v_Φ, очень близкое к v_0. Легко показать, что хотя уравнение (7.26) имеет корни, близкие к v_0, эта близость не настолько велика, чтобы нарушить условие (7.23).

Мы исследовали устойчивость пучка при $\nu\gamma_0 \ll 1$ по отношению к волнам с фазовой скоростью, меньшей скорости света ($k^2 - \omega^2 > 0$), когда можно пренебречь влиянием внешней трубы. Разработанный в этой главе метод дает возможность исследовать и другие случаи. Особый интерес представляет исследование поведения пучка с учетом влияния стенок как для фазовой скорости, большей c, так и для длин-

ных волн с фазовой скоростью, меньшей c. В этом случае к двум взаимодействующим колебательным системам (электронный и ионный газ) прибавляется еще третья — резонирующая полость, которая, в зависимости от условий, может приводить как к раскачке, так и к затуханию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, Отчет АН СССР, 1953 г.; Атомная энергия, **1**, № 5 9 (1956).
2. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. настоящий том, стр. 330.
3. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, Отчет АН СССР, 1953 г.; ДАН СССР, **107**, 807 (1956).
4. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).